TÍN HIỆU GIẢI TÍCH-DAO ĐỘNG TỔNG QUÁT

Với tín hiệu thực *x(t)* và phép biến đổi Hilbert(H) của nó là $\hat{x}(t)$ người ta định nghĩa tín hiệu giải tích của tín hiệu *x(t)* như sau: $z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$

Trong đó: $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$ và: $\hat{x}(t) = \mathrm{H}\{x(t)\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau$.

Như vậy, các tín hiệu thực có thể biểu diễn thành tín hiệu của không gian giải tích là các tín hiệu của không gian L^2, tức là các tín hiệu có năng lượng hữu hạn và công suất trung bình hữu hạn, liên tục trong từng khoảng, và có trị trung bình bằng 0-không có thành phần một chiều.

Tín hiệu giải tích là hàm thời gian phức, có thể viết dưới dạng: $z(t) = |z(t)|e^{i\psi(t)}$, trong đó:

$|z(t)| = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}$ và: $\psi(t) = Arg(z(t))$ là các hàm thời gian thực.

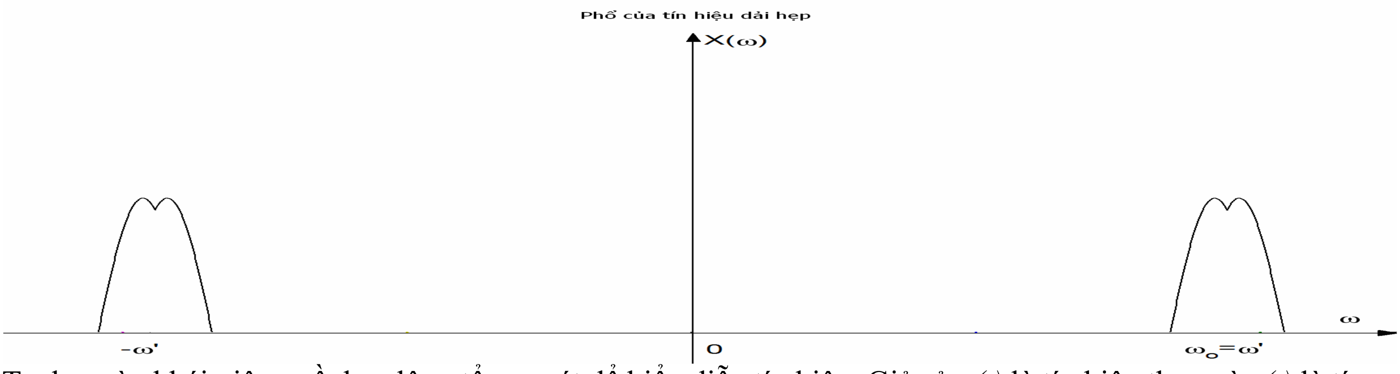
Việc sử dụng khái niệm giải tích, cho phép mở rộng khái niệm biên độ và tần số của tín hiệu điều hoà cho các tín hiệu không điều hoà. Nếu *z(t)* là tín hiệu giải tích của tín hiệu thực *x(t)*, thì biên độ tức thời *X(t)* hay đường bao biên độ của của tín hiệu thực *x(t)* là biên độ của tín hiệu giải tích:

$$X(t) = |z(t)| = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}$$

Còn tần số góc tức thời $\omega(t)$ của tín hiệu thực *x(t)* là đạo hàm của Argument của tín hiệu giải tích:

$$\omega(t) = \psi'(t) = \operatorname{Im}\left[Ln(z(t))'\right] = \operatorname{Im}\frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{x(t)\hat{x}'(t) - x'(t)\hat{x}(t)}{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}$$

Vậy, biên độ tức thời và tần số tức thời của tín hiệu *x(t)* không điều hoà là các đại lượng biến thiên theo thời gian. Một thông số thứ ba của tín hiệu điều hoà là góc pha cũng có thể mở rộng cho tín hiệu không điều hoà Nếu ω_o là một hằng số dương (là một hằng số xác định), thì góc pha tức thời của tín hiệu *x(t)* có tín hiệu giải tích *z(t)* được xác định theo biểu thức sau: $\psi(t) = \omega_o t + \varphi(t)$, với giá trị ω_o khác nhau, pha tức thời $\varphi(t)$ cũng sẽ khác nhau, việc chọn ω_o là tuỳ ý, tuy nhiên, người ta thường chọn sao cho phổ của tín hiệu *x(t)* tập trung quanh nó. Với tín hiệu *x(t)* tần số thấp hoặc dải rộng khó chọn giá trị ω_o giống nhau. Còn với tín hiệu dải hẹp, có thể chọn giống nhau. Ví dụ, với tín hiệu dải hẹp đối xứng qua một tần số ω' nào đó (trường hợp các tín hiệu điều chế), người ta chọn ω_o=ω'(hình dưới).



Ta đưa vào khái niệm về dao động tổng quát để biểu diễn tín hiệu. Giả sử *x(t)* là tín hiệu thực và *z(t)* là tín hiệu giải tích của nó, ta biểu diễn *x(t)* dưới dạng:

$$x(t) = \operatorname{Re} z(t) = \operatorname{Re} X(t)e^{i\psi(t)} = \operatorname{Re} X(t)e^{i(\omega_0 t + \varphi(t))} = X(t)Cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

Tương tự, biến đổi H của *x(t)* có thể viết:

$$\hat{x}(t) = \operatorname{Im} z(t) = \operatorname{Im} X(t)e^{i\psi(t)} = \operatorname{Im} X(t)e^{i(\omega_0 t + \varphi(t))} = X(t)Sin(\omega_0 t + \varphi(t))$$

Biểu diễn *x(t)* dưới dạng trên chính là biểu diễn bằng dao động tổng quát với tần số ω_o xác định. Như vậy, với ω_o khác nhau, việc biểu diễn tín hiệu bằng dao động tổng quát sẽ khác nhau.

Ta viết lại các công thức trên dưới dạng khác:

$$x(t) = X(t)Cos(\omega_0 t)Cos(\varphi(t)) - X(t)Sin(\omega_0 t)Sin(\varphi(t)) = a(t)Cos(\omega_0 t) - b(t)Sin(\omega_0 t)$$

$\hat{x}(t)=X(t)Sin(\omega_0 t)Cos(\varphi(t))+X(t)Cos(\omega_0 t)Sin(\varphi(t))=a(t)Sin(\omega_0 t)+b(t)Cos(\omega_0 t)$

Các tín hiệu $a(t)=X(t)Cos(\omega_0 t)$ và $b(t)=X(t)Sin(\omega_0 t)$ được gọi là các thành phần đồng pha và thành phần vuông góc của tín hiệu *x(t)*.

Cách biểu diễn tín hiệu bằng dao động tổng quát theo biểu thức trên thường được dùng cho các tín hiệu dải hẹp. Các thành phần đồng pha và thành phần vuông góc khi đó là các tín hiệu thay đổi chậm so với ω_o .Tần số ω_o thường được gọi là sóng mang của tín hiệu dải hẹp.

Biểu diễn tín hiệu bằng dao động tổng quát là mở rộng khái niệm biểu diễn vector cho các tín hiệu không điều hoà. Như đã biết, một tín hiệu điều hoà có thể viết dưới dạng:

$x(t)=XCos(\omega_0 t+\varphi)=\operatorname{Re}Xe^{j\psi(t)}=\operatorname{Re}X(t)e^{j(\omega_0 t+\varphi)}=\operatorname{Re}\mathring{X}(t)e^{j\omega_0 t}$ với $\mathring{X}(t)=Xe^{j\varphi}$ là vector hay biên độ phức biểu diễn tín hiệu *x(t)*.

Như vậy, một tín hiệu bất kì, theo (4.6) có thể viết dưới dạng:

$x(t)=X(t)Cos(\omega_0 t+\varphi(t))=\operatorname{Re}X(t)e^{j\psi(t)}=\operatorname{Re}X(t)e^{j(\omega_0 t+\varphi(t))}=\operatorname{Re}\mathring{X}(t)e^{j\omega_0 t}$ với $\mathring{X}(t)=X(t)e^{j\varphi(t)}$ là hàm phức biểu diễn *x(t)* với ω_o xác định. Hàm này được gọi là vector tổng quát biến thiên theo thời gian. Ta cso thể biểu diễn $\mathring{X}(t)=X(t)e^{j\varphi(t)}=X(t)Cos\varphi(t)+jX(t)Sin\varphi(t)=a(t)+jb(t)$ (4.12).

Như vậy, thành phần đông pha của tín hiệu là phần thực, còn thành phần vuông góc là phần ảo của vector tổng quát biểu diễn tín hiệu *x(t)*.

Vector tổng quát $\mathring{X}(t)$ được gọi là đường bao phức hay biên độ phức tức thời của tín hiệu *x(t)*. Tên gọi đó tương tự với biên độ phức của tín hiệu điều hoà trong biểu thức (4.10). Ta có:

$X(t)=\left|\mathring{X}(t)\right|=\sqrt{x^2(t)+\hat{x}^2(t)}=\sqrt{a^2(t)+b^2(t)}$ (4.13).

Quan hệ giữa tín hiệu giải tích *z(t)* của tín hiệu *x(t)* và vector tổng quát biểu diễn nó được xác định:

$z(t)=\mathring{X}(t)e^{j\omega_o(t)}=[a(t)+jb(t)]e^{j\omega_o(t)}$ (4.14)

Như vậy, có thể nói rằng: biểu diễn vector tín hiệu điều hoà chỉ là trường hợp riêng của biểu diễn tín hiệu bằng dao động tổng quát.

Xét ví dụ sau, khi sử dụng các định nghĩa đã nêu trên để xác định biến đổi H , tín hiệu giải tích, đương bao, tần số và pha tức thời của tín hiệu điều hoà $x(t)=XCos(\omega_0 t+\varphi)$

Biến đổi Hilbert của tín hiệu *x(t)*.

$\hat{x}(t)=\mathrm{H}\{x(t)\}=\mathrm{H}\{XCos(\omega_0 t)Cos(\varphi)-XSin(\omega_0 t)Sin(\varphi)\}=XSin(\omega_0 t+\varphi)$.

Áp dụng tính chất tuyến tính của biến đổi H và cặp biến đổi H của $x(t)=Cos(\omega_0 t)$ và $x(t)=Sin(\omega_0 t)$, ta sẽ nhận được tín hiệu giải tích *z(t)* như sau:

$z(t)=x(t)+j\hat{x}(t)=XCos(\omega_0 t+\varphi)+jXSin(\omega_0 t+\varphi)=Xe^{j(\omega_0 t+\varphi)}$.

Nếu định nghĩa biên độ phức-vector của tín hiệu điều hoà *x(t)* là: $\mathring{X}=Xe^{j\varphi}$, thì tín hiệu giải tích trên có thể viết dưới dạng: $z(t)=\mathring{X}e^{j\omega_o t}$.

Biên độ phức tức thời, tần số tức thời và pha tức thời của tín hiệu điều hoà là các đại lượng không thay đổi theo thời gian và bằng: $X(t)=X;\ \varphi(t)=\varphi;\ \omega_0(t)=\omega_0$, tất nhiên, pha tức thời được xác định với giá trị ω_0 đã chọn.

Ví dụ trên đây cho thấy rằng: Việc biểu diễn tín hiệu không điều hoà bằng dao động tổng quát, là mở rộng biểu diễn vector tín hiệu điều hoà, dựa trên các khái niệm về biên độ tức thời, tần số tức thời và pha tức thời.

Bây giờ, xét đến một vài tính chất phổ của tín hiệu giải tích. Trước hết ta sẽ xét đến quan hệ về phổ của tín hiệu và phổ pha tín hiệu giải tích của nó. Sau đó, sẽ xét đến quan hệ giữa các mật độ phổ năng lượng và mật độ phổ công suất.

Giả sử *x(t)* là tín hiệu có biến đổi H và cặp biến đổi H của nó có thể viết dưới dạng:

$$\hat{x}(t) = \mathrm{H}\{x(t)\} = \frac{1}{\pi t} * x(t) \quad (4.14)$$

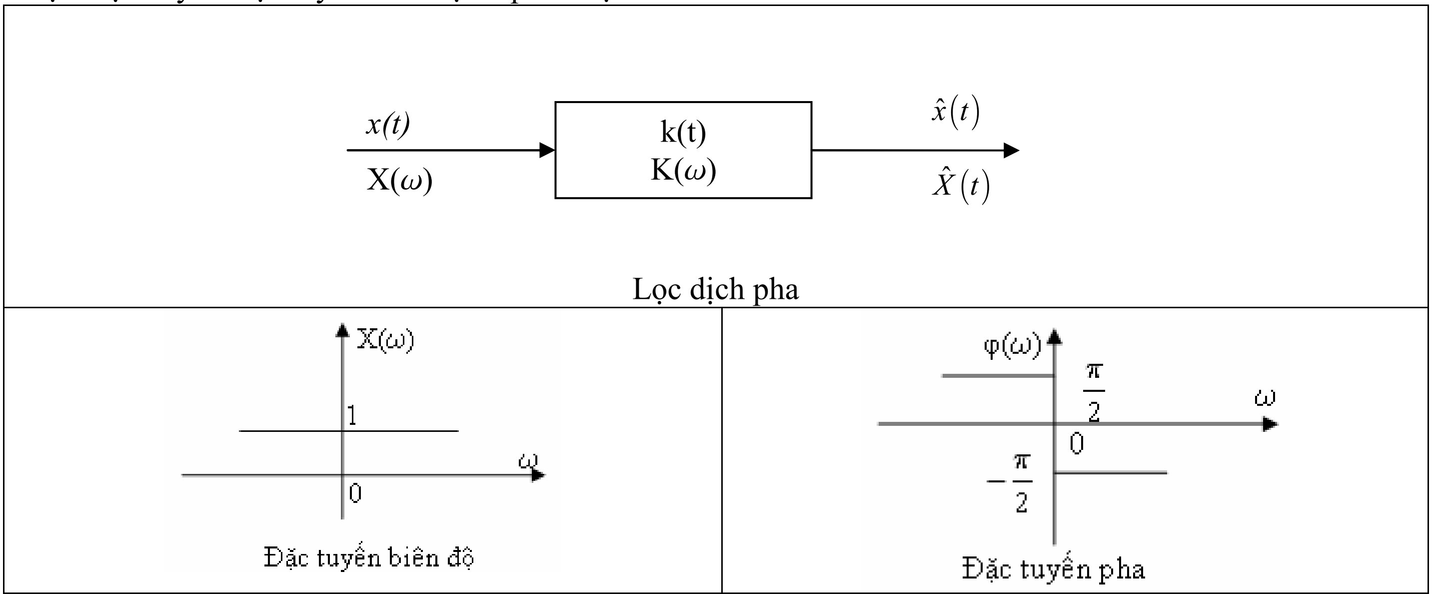
$$x(t) = \mathrm{H}\{\hat{x}(t)\} = \frac{-1}{\pi t} * \hat{x}(t) \quad (4.15)$$

Ta thực hiện điều chế tín hiệu: $Sgn(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \Rightarrow \frac{1}{\pi t} \leftrightarrow -jSgn(\omega)$

Các biểu thức (4.14) và (4.15) trong miền tần số có dạng: $\begin{cases} \hat{X}(\omega) = -jSgn(\omega)X(\omega) \\ X(\omega) = jSgn(\omega)\hat{X}(\omega) \end{cases}$ với $\hat{X}(\omega) = \mathrm{F}\ \{\hat{x}(t)\}$ và $X(\omega) = \mathrm{F}\ \{x(t)\}$, từ biểu thức trên, có thể thấy rằng, tín hiệu $\hat{x}(t)$ có thể coi là đáp ứng đối với $x(t)$ của mạch lọc lý tưởng, không thể thực hiện, có đáp ứng xung là hàm: $k(t) = \frac{1}{\pi t}$ và hàm truyền:

$$K(\omega) = -jSign(\omega) = e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \pi UnitStep(\omega)\right)} \quad (4.20).$$

Mạch lọc này có đặc tuyến biên độ và pha được biểu diễn trên hình 4.4:



Hình 4.4

Bộ lọc này không làm thay đổi biên độ các thành phần trong tín hiệu *x(t)*, còn các góc pha của mỗi thành phần bị dịch chuyển $-\pi/2$ với $\omega>0$ và $\pi/2$ với $\omega<0$. Như vậy, có thể thấy rằng, tín hiệu *x(t)* và biến đổi H của nó có cùng phổ biên độ, còn phổ pha của $\hat{x}(t)$ bị dịch đi $-\pi/2$ với $\omega>0$ và $\pi/2$ với $\omega<0$.

Áp dụng các công thức (4.17),(4.18) để xét ví dụ sau:

Giả thiết: $y(t) = x(t)Cos(\omega_0 t)$, trong đó $x(t)$ là tín hiệu có phổ tần thấp, và thoả mãn điều kiện: $X(\omega) = 0$ với mọi $|\omega| > \omega_{Max}$, trong đó: $\omega_o \ge \omega_{Max}$. Tìm biến đổi Hilbert của nó và tín hiệu giải tích của nó là: $z_y(t) = y(t) + j\hat{y}(t)$. Theo (4.15) ta có:

$$\hat{y}(t) = x(t)Cos(\omega_0 t) * \frac{1}{\pi t}.$$

Phổ của nó bằng: $\hat{Y}(\omega) = -\frac{1}{2} jSgn(\omega)\left[X(\omega-\omega_o) + X(\omega+\omega_o)\right] = \frac{1}{2j} Sgn(\omega)\left[X(\omega-\omega_o) + X(\omega+\omega_o)\right]$

Do giả thiết $\omega_o \ge \omega_{Max}$ nên đảm bảo $X(\omega-\omega_o)$ và $X(\omega+\omega_o)$ tách rời nhau, hơn nữa $X(\omega-\omega_o) \ne 0 \Leftrightarrow \omega > 0$ ($\omega > \omega_o - \omega_{Max}$) và $X(\omega+\omega_o) \ne 0 \Leftrightarrow \omega < 0$ ($\omega < \omega_{Max} - \omega_o$). Ta có thể viết rằng:

$$\hat{Y}(\omega) = \frac{1}{2j}\left[X(\omega-\omega_o) - X(\omega+\omega_o)\right]$$

Biến đổi Fourier ngược, ta tìm được: $\hat{y}(t)=x(t)Sin(\omega_0 t)$.

Có thể thấy rằng biến đổi Hilbert của tín hiệu $y(t)=x(t)Cos(\omega_0 t)$ với *x(t)* là tín hiệu có X(ω)=F $\{x(t)\}$=0 với $|\omega|>\omega_{Max}$ và $\omega_o \geq \omega_{Max}$ là tín hiệu $\hat{y}(t)=x(t)Sin(\omega_0 t)$. Tín hiệu giải tích của y(t) thoả mãn điều kiện trên sẽ là: $Z_y(t)=x(t)e^{j\omega_o t}$.

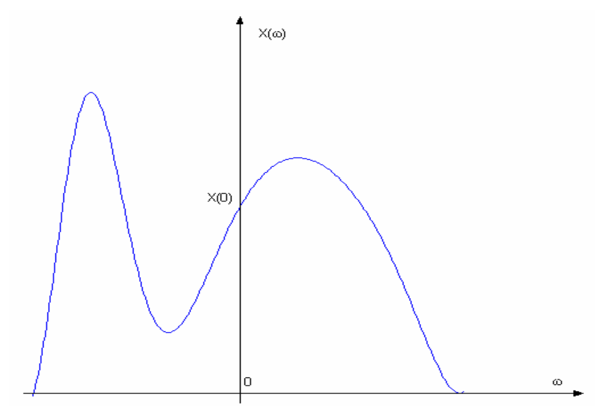
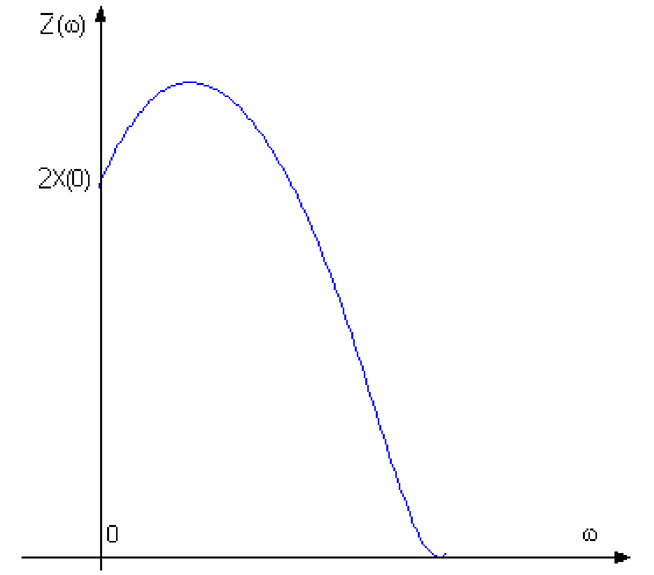
Các kết quả nhận được trên, ta có thể khái quát hoá cho tín hiệu $y(t)=x(t)Cos(\omega_0 t+\varphi)$ với pha ban đầu khác 0. Biến đổi Hilbert của nó sẽ là: $\hat{y}(t)=x(t)Sin(\omega_0 t+\varphi)$, còn tín hiệu giải tích có dạng:

$Z_y(t)=x(t)e^{j(\omega_o t+\varphi)}$

Sau đây, ta sẽ xét quan hệ giữa phổ của tín hiệu *x(t)* và phổ của tín hiệu giải tích của nó. Áp dụng (4.17) có thể viết:

$Z(\omega)=X(\omega)+j(-jSgn(\omega))\hat{X}(\omega)=2X(\omega)UnitStep(\omega)$ (4.21)

Phổ của tín hiệu giải tích có một tính chất rất quan trọng, đó là nó chỉ có phổ bên phải. Với tần số âm, nó có giá trị bằng 0. Còn ở tần số dương, nó có giá trị lớn hơn phổ của tín hiệu *x(t)* gấp 2 lần (hình 4.5).

	
Phổ của *x(t)*	Phổ của tín hiệu giải tích *z(t)*

Tính chất trên đây của tín hiệu giải tích, được dùng để biểu diễn phổ của các tín hiệu chỉ có phổ một phía.

Có thể nô tả quan hệ giữa phổ của tín hiệu và phổ của tín hiệu giải tích: $X(\omega)=\frac{1}{2}\left[Z(\omega)+Z^*(\omega)\right]$(4.22).

Sau đây, xét quqn hệ giữa mật độ phổ năng lượng và mật độ phổ công suất của tín hiệu *x(t)* và tín hiệu giải tích của nó, quan hệ này sẽ được xét qua quan hệ giữa các hàm tương quan của tín hiệu *x(t)* và $\hat{x}(t)$.

Giả thiết rằng, tín hiệu *x(t)* là tín hiệu có năng lương hữu hạn, hãy xác định hàm tự tương quan của tín hiệu *x(t)* và $\hat{x}(t)$ qua hàm $\varphi_{\hat{x}x}(\tau),\varphi_{x\hat{x}}(\tau),\varphi_{xx}(\tau),\varphi_{\hat{x}\hat{x}}(\tau)$, ta sẽ có: *z(t)=x(t)*+j $\hat{x}(t)$ nên:

$$\varphi_{zz}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} z(t)z^*(t-\tau)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x(t)+j\hat{x}(t)\right]\left[x^*(t-\tau)-j\hat{x}^*(t-\tau)\right]dt=\varphi_{xx}(\tau)+\varphi_{\hat{x}\hat{x}}(\tau)+j\varphi_{\hat{x}x}(\tau)-j\varphi_{x\hat{x}}(\tau)$$

Bởivì tín hiệu $\hat{x}(t)$ có thể coi là đáp ứng đối với tín hiệu *x(t)*, của mạch lọc dịch pha có đặc tính xung k(t)=1/πt và đặc tính tần số K(ω)=-jSgn(ω). Nên theo các công thức từ (2.257) đến (2.261), giữa các hàm tương quan của các tín hiệu *x(t)* và $\hat{x}(t)$ có quan hệ sau: $\varphi_{\hat{x}x}(\tau)=k(\tau)*\varphi_{xx}(\tau)=\hat{\varphi}_{xx}(\tau)$(4.24) và: $\varphi_{\hat{x}\hat{x}}(\tau)=k(-\tau)*\varphi_{\hat{x}x}(\tau)=k(-\tau)*\varphi_{\hat{x}x}(\tau)=k(-\tau)*\hat{\varphi}_{xx}(\tau)=\varphi_{xx}(\tau)$(4.25). Theo công thức (4.24), hàm tương quan $\varphi_{\hat{x}x}(\tau)$ của tín hiệu $\hat{x}(t)$ và *x(t)* bằng biến đổi Hilbert của hàm tự tương quan của tín hiệu *x(t)*. hàm $\varphi_{\hat{x}x}(\tau)$-biến đổi Hilbert của hàm chẵn $\varphi_{xx}(\tau)$ (nếu *x(t)* là tín hiệu thực), là hàm lẻ, tức là: $\varphi_{\hat{x}x}(\tau)=-\varphi_{\hat{x}x}(-\tau)$(4.26). Khi ấy để ý đến (4.26) và dựa trên tính chất của hàm tương quan

$\varphi_{xy}(\tau)=\varphi^*_{yx}(-\tau)$, có thể viết: $\varphi_{x\hat{x}}(\tau)=\varphi_{\hat{x}x}(-\tau)=-\varphi_{\hat{x}x}(\tau)$(4.27). Từ công thức (4.25) suy ra rằng: hàm tự tương quan của tín hiệu *x(t)* và $\hat{x}(t)$ bằng nhau. Điều này xuất phát từ chỗ hai tín hiệu này chỉ khác nhau ở phổ pha. Khi thay 4.25, 4.27 và sau đó 4.24 vào công thức 4.23 ta được:

$\varphi_{zz}(\tau)=2\left[\varphi_{xx}(\tau)+j\varphi_{\hat{x}x}(\tau)\right]=2\left[\varphi_{xx}(\tau)+j\hat{\varphi}_{xx}(\tau)\right]$(4.28).

Như có thể thấy, hàm tự tương quan của tín hiệu giải tích *z(t)* của tín hiệu *x(t)* bằng 2 lần tín hiệu giải tích của hàm tự tương quan của *x(t)*. Tức là: $\varphi_{xx}(\tau)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\varphi_{zz}(\tau)$ (4.29)

Nếu kí hiệu hàm mật độ phổ năng lượng của các tín hiệu *z(t)* và *x(t)* là: $\phi_x(\omega)=\mathrm{F}\ \{\varphi_{xx}(\tau)\}$ và $\phi_z(\omega)=\mathrm{F}$ $\{\varphi_{zz}(\tau)\}$ khi thực hiện biến đổi Fourier hai vế của biểu thức(4.28) ta được:

$\phi_z(\omega)=2\left[\phi_x(\omega)+j\hat{\phi}_x(\omega)\right]=2\left[\phi_x(\omega)+j\left(-jSgn(\omega)\right)\phi_x(\omega)\right]=4\phi_x(\omega)UnitStep(\omega)$(4.30).

Mật độ phổ năng lượng của tín hiệu giải tích *z(t)* chỉ có bên phải, tương tự như Z(ω) của nó. Mật độ phổ năng lượng của tín hiệu giải tích ở phía tần số dương lớn hơn 4 lần mật độ phổ của tín hiệu *x(t)*.

Quan hệ ngược của 4.30 có dạng: $\phi_x(\omega)=\frac{1}{4}\left[\phi_z(\omega)+\phi_z(-\omega)\right]$(4.31).

Tương tự, ta sẽ nhận được kêế quả với tín hiệu có công suất trung bình hữu hạn như sau:

$\psi_z(\omega)=4\psi_x(\omega)UnitStep(\omega)$

$\psi_x(\omega)=\frac{1}{4}\left[\psi_z(\omega)+\psi_z(-\omega)\right]$