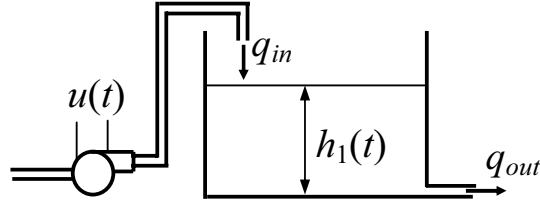


Một số đối tượng phi tuyến

Thí dụ 1: Mô hình toán bồn chứa chất lỏng (Single Tank)



A : tiết diện ngang bồn chứa

a : tiết diện van xả

k : hệ số tỉ lệ với công suất máy bơm

Phương trình cân bằng: $\frac{d}{dt}(Ah(t)) = q_{in}(t) - q_{out}(t)$

Dòng vào: $q_{in}(t) = ku(t)$

Dòng ra: $q_{out}^2(t) = (2/\rho)a^2C_D^2p(t)$

trong đó:

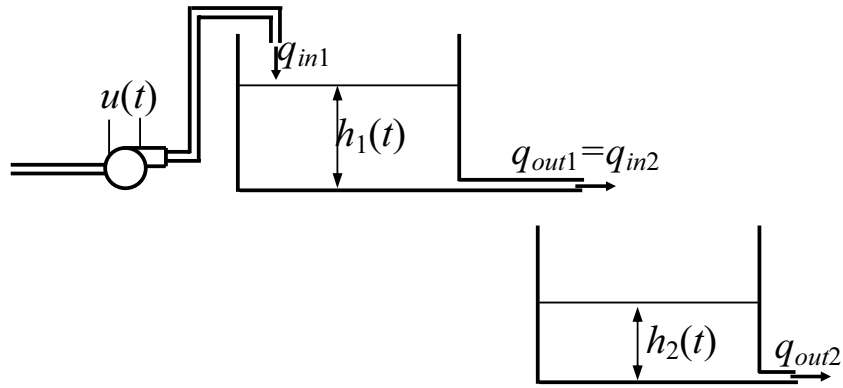
$p(t) = \rho gh(t)$: áp suất

$C_D = 1$: hệ số xả

Suy ra:

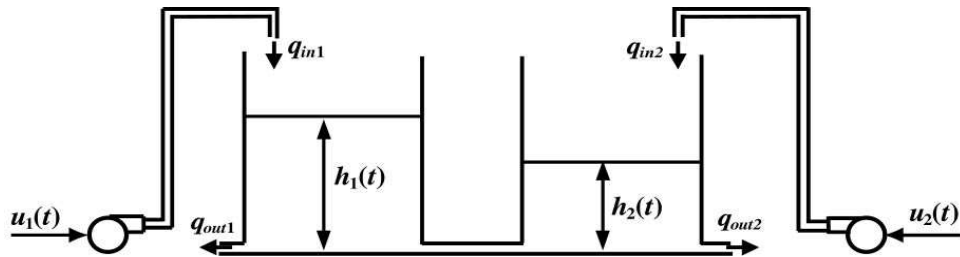
$$\dot{h}(t) = \frac{1}{A}(ku(t) - a\sqrt{2gh(t)})$$

Thí dụ 2: Hệ bồn nối tiếp (Cascade Tank)



$$\begin{cases} \dot{h}_1(t) = \frac{1}{A_1} (k_1 u_1(t) - a_1 \sqrt{2gh_1(t)}) \\ \dot{h}_2(t) = \frac{1}{A_2} a_1 \sqrt{2gh_1(t)} \end{cases}$$

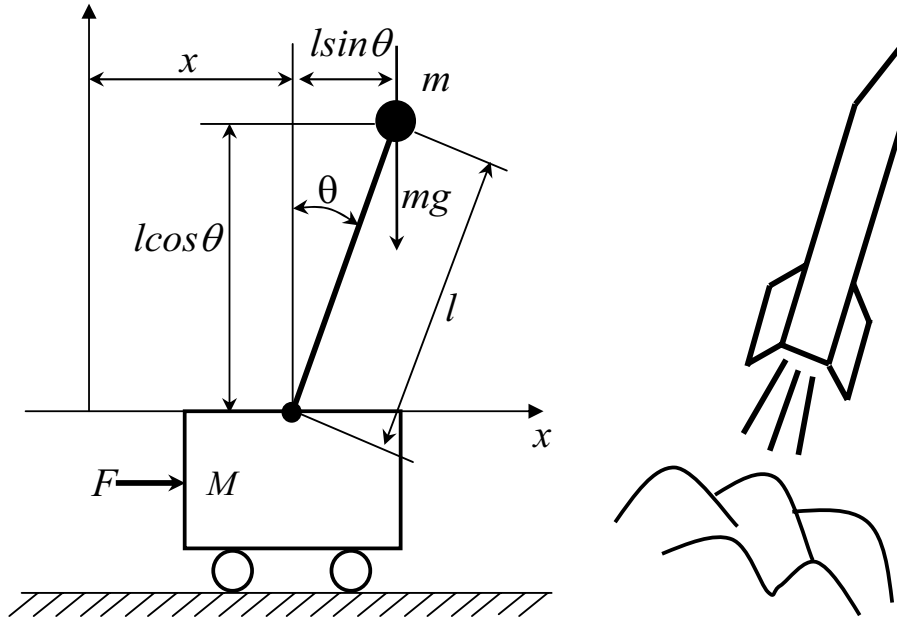
Thí dụ 3: Hệ bồn liên kết (Coupled Tank)



Mô hình toán:

$$\begin{cases} \dot{h}_1(t) = \frac{1}{A_1} (k_1 u_1(t) - a_1 \sqrt{2gh_1(t)} - \text{sgn}(h_1(t) - h_2(t)) a_{12} \sqrt{2g|h_1(t) - h_2(t)|}) \\ \dot{h}_2(t) = \frac{1}{A_2} (k_2 u_2(t) - a_2 \sqrt{2gh_2(t)} - \text{sgn}(h_2(t) - h_1(t)) a_{12} \sqrt{2g|h_1(t) - h_2(t)|}) \end{cases}$$

Thí dụ 4: Hệ con lắc ngược



Chú thích:

M : trọng lượng xe [Kg]

m : trọng lượng con lắc [Kg]

l : chiều dài con lắc [m]

u : lực tác động vào xe [N]

g : gia tốc trọng trường [m/s^2]

x : vị trí xe [m]

θ : góc giữa con lắc và phương thẳng đứng [rad]

Cách 1: Dùng định luật Newton

Gọi (x_p, y_p) là tọa độ của vật nặng m ở đầu con lắc, ta có:

$$x_p = x + l \sin \theta \quad (1)$$

$$y_p = l \cos \theta \quad (2)$$

Áp dụng định luật II Newton cho chuyển động theo phương x , ta có:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + m \frac{d^2 x_p}{dt^2} = F \quad (3)$$

Thay x_G ở biểu thức (1) vào biểu thức (3) suy ra:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) = F \quad (4)$$

Khai triển các đạo hàm ở biểu thức (4) và rút gọn ta được:

$$(M + m)\ddot{x} - ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + ml(\cos \theta)\ddot{\theta} = F \quad (5)$$

Mặt khác, áp dụng định luật II Newton cho chuyển động quay của con lắc quanh trục ta được:

$$m \frac{d^2 x_P}{dt^2} l \cos \theta - m \frac{d^2 y_P}{dt^2} l \sin \theta = mgl \sin \theta \quad (6)$$

Thay (1) và (2) vào (6) suy ra:

$$\left[m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) \right] l \cos \theta - \left[m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) \right] l \sin \theta = mgl \sin \theta \quad (7)$$

Khai triển các đạo hàm ở biểu thức (7) và rút gọn ta được:

$$m\ddot{x} \cos \theta + ml\ddot{\theta} = mg \sin \theta \quad (8)$$

Từ (5) và (8), ta có thể dễ dàng tính được:

$$\ddot{x} = \frac{F + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta \sin \theta}{M + m - m(\cos \theta)^2} \quad (9)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{F \cos \theta - (M + m)g(\sin \theta) + ml(\cos \theta \sin \theta)\dot{\theta}}{ml(\cos \theta)^2 - (M + m)l} \quad (10)$$

Cách 2: Dùng công thức Euler–Lagrange:

Gọi (x_P, y_P) là tọa độ của vật nặng m ở đầu con lắc, ta có:

$$x_P = x + l \sin \theta \quad (1)$$

$$y_P = l \cos \theta \quad (2)$$

Động năng của vật nặng đầu con lắc:

$$T_P = \frac{1}{2} m \dot{x}_P^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}_P^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} m (-l \dot{\theta} \sin \theta)^2$$

$$\Rightarrow T_P = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + ml \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$$

Động năng của xe:

$$T_C = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

Động năng của hệ thống:

$$T = T_P + T_C = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + ml \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$$

Thế năng của hệ thống = thế năng vật nặng đầu con lắc:

$$U = mgl \cos \theta$$

Do đó:

$$L = T - U = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta \quad (3)$$

Phương trình Euler – Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (5)$$

Thay (4) vào (3):

$$(M + m)\ddot{x} + ml(\cos \theta)\ddot{\theta} - ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 = F$$

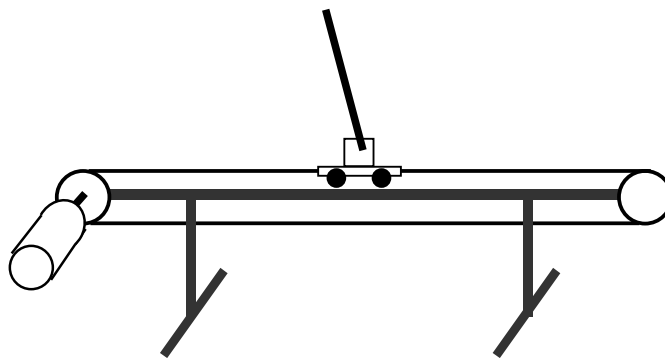
$$m\ddot{x} \cos \theta + ml\ddot{\theta} - mg \sin \theta = 0$$

Suy ra:

$$\ddot{x} = \frac{F + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta \sin \theta}{M + m - m(\cos \theta)^2}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{F \cos \theta - (M + m)g(\sin \theta) + ml(\cos \theta \sin \theta)\dot{\theta}}{ml(\cos \theta)^2 - (M + m)l}$$

Thí dụ 5: Mô hình toán hệ con lắc ngược truyền động dùng động cơ DC, xét ảnh hưởng của ma sát:



*** Đặc tính động của hệ xe – con lắc có xét đến ảnh hưởng của ma sát:**

Tương tự như thí dụ 4, tuy nhiên lực tác động phải kể thêm lực ma sát:

$$(M + m)\ddot{x} - ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + ml(\cos \theta)\ddot{\theta} = F - f_C \quad (1)$$

$$m\ddot{x} \cos \theta + ml\ddot{\theta} - mg \sin \theta = -f_P \quad (2)$$

trong đó: f_C lực ma sát tác động lên xe

f_P lực ma sát tác động lên con lắc

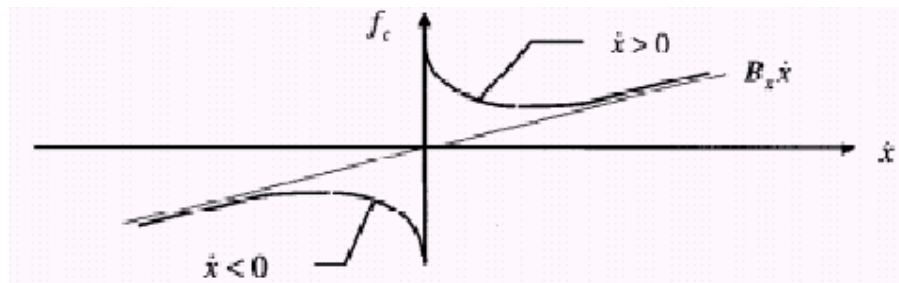
*** Đặc tính ma sát:**

Giả thiết có cả ma sát tĩnh và ma sát nhớt tác động làm cản trở chuyển động của xe và con lắc. Các lực ma sát này có thể mô tả bằng các phương trình sau:

$$f_C = \text{sgn}(\dot{x})A_x e^{-C_x|\dot{x}|} + B_x|\dot{x}| \quad (3)$$

$$f_P = \text{sgn}(\dot{\theta})A_\theta e^{-C_\theta|\dot{\theta}|} + B_\theta|\dot{\theta}| \quad (4)$$

trong đó $A_x, B_x, C_x, A_\theta, B_\theta, C_\theta > 0$.



*** Đặc tính động cơ:**

$$L_a \dot{I}_a = V_a - R_a I_a - E_b \quad (5)$$

$$E_b = K_b \omega$$

$$J_m \dot{\omega} = T_m - T_l - B_m \omega \quad (6)$$

$$T_m = K_i K_g I_a$$

$$T_l = Fr$$

$$\omega = K_g \dot{x} / r$$

L_a : điện cảm phần ứng

R_a : điện trở phần ứng

I_a : dòng điện phần ứng

V_a : điện áp phần ứng

T_m : moment động cơ

T_l : moment tải

ω : tốc độ quay động cơ

r : bán kính pu-li

J_m : moment quán tính động cơ B_m : hệ số ma sát nhớt
 K_i : hệ số moment K_i : hệ số moment
 K_g : hệ số giảm tốc E_b : sức phản điện
 F : lực tác động vào xe

Đặc tính động cơ có thể biểu diễn theo I_a , x và F như sau:

$$L_a \dot{I}_a + R_a I_a + \frac{K_g K_b}{r} \dot{x} = V_a \quad (7)$$

$$\frac{K_g J_m}{r^2} \ddot{x} + \frac{K_g B_m}{r^2} \dot{x} - \frac{K_i K_g}{r} I_a = -F \quad (8)$$

Do đó mô hình toán học của hệ xe con lắc với tín hiệu vào là điện áp cấp cho động cơ như sau:

$$\begin{cases} (M + m + \frac{K_g J_m}{r^2}) \ddot{x} - ml(\sin \theta) \dot{\theta}^2 + ml(\cos \theta) \ddot{\theta} + \frac{K_g B_m}{r^2} \dot{x} - \frac{K_g K_i}{r} I_a = -f_C \\ m \ddot{x} \cos \theta + ml \ddot{\theta} - mg \sin \theta = -f_P \\ L_a \dot{I}_a + R_a I_a + \frac{K_g K_b}{r} \dot{x} = V_a \end{cases}$$