Môn học

LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

Giảng viên: ThS Huỳnh Thái Hoàng
Bộ môn Điều Khiển Tự Động
Khoa Điện – Điện Tử
Đại học Bách Khoa TP.HCM
Email: hthoang@dee.hcmut.edu.vn

Chương 9

HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN PHI TUYẾN

Nội dung chương 9

- Khái niệm
  - Định nghĩa
  - Đặc điểm của hệ phi tuyến
  - Các phương pháp khảo sát hệ phi tuyến
- Phương pháp tuyến tính hóa
- Phương pháp hàm mô tả
- Phương pháp Lyapunov

Khái niệm

Khái niệm về hệ phi tuyến

- Hệ phi tuyến là hệ thống trong đó quan hệ vào – ra không thể mô tả bằng phương trình vi phân/sai phân tuyến tính.
- Phần lớn các đối tượng điều khiển trong tự nhiên mang tính phi tuyến. Các hệ thống:
  - Hệ thống thủy khí (TD: bồn chứa chất lỏng,…),
  - Hệ thống nhiệt động học (TD: lò nhiệt,…),
  - Hệ thống cơ khí (TD: cánh tay máy,….),
  - Hệ thống điện – từ (TD: động cơ, mạch khuếch đại,…)
  - Hệ thống vật lý có cấu trúc hỗn hợp,…

đều có tính phi tuyến.

Tính chất của hệ phi tuyến

- Hệ phi tuyến không thỏa mãn nguyên lý xếp chồng.
- Tính ổn định của hệ phi tuyến không chỉ phụ thuộc vào cấu trúc, thông số của hệ thống mà còn phụ thuộc vào tín hiệu vào.
- Nếu tín hiệu vào hệ phi tuyến là tín hiệu hình sin thì tín hiệu ra ngoài thành phần tần số cơ bản (bằng tần số tín hiệu vào) còn có các thành phần hài bậc cao (là bội số của tần số tín hiệu vào).
- Hệ phi tuyến có thể xảy ra hiện tượng dao động tự kích.

Khái niệm

Mô tả toán học hệ phi tuyến dùng phương trình vi phân

- Tùy theo dạng tín hiệu bên trong hệ thống mà hệ phi tuyến có thể chia làm hai loại:
  - Hệ phi tuyến liên tục
  - Hệ phi tuyến rời rạc.

Nội dung môn học chỉ đề cập đến hệ phi tuyến liên tục.

- Tổng quát, quan hệ vào – ra của hệ phi tuyến liên tục có thể biểu diễn dưới dạng phương trình vi phân phi tuyến bậc *n*:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = g\left(\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}, \cdots, \frac{dy(t)}{dt}, y(t), \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}}, \cdots, \frac{du(t)}{dt}, u(t)\right)$$

trong đó: $u(t)$ là tín hiệu vào,

$y(t)$ là tín hiệu ra,

$g(.)$ là hàm phi tuyến

Mô tả toán học hệ phi tuyến dùng phương trình trạng thái

- Hệ phi tuyến liên tục có thể mô tả bằng phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \\ y(t) = h(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \end{cases}$$

trong đó: $u(t)$ là tín hiệu vào,

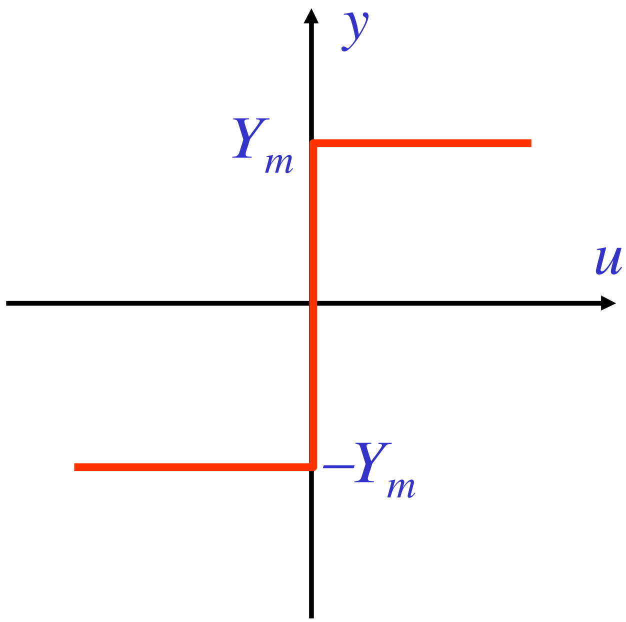
$y(t)$ là tín hiệu ra,

$\boldsymbol{x}(t)$ là vector trạng thái, $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^T$

$\boldsymbol{f}(.)$, h(.) là các hàm phi tuyến

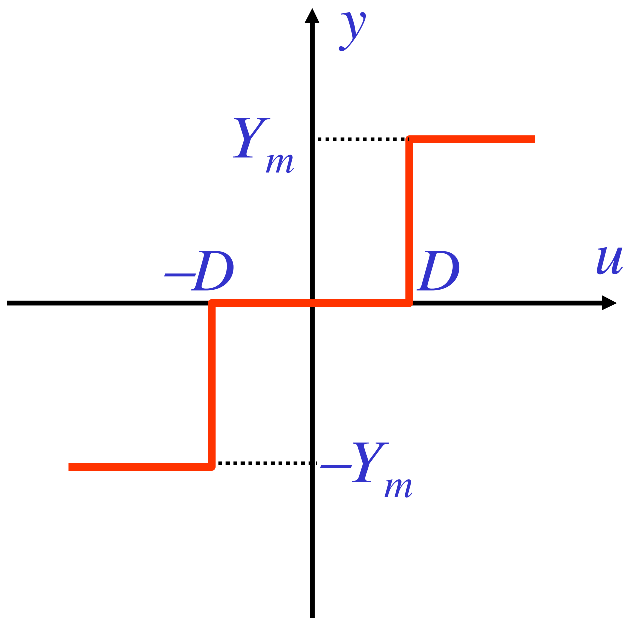
Các khâu phi tuyến cơ bản

Khâu relay 2 vị trí



$$y = Y_m \operatorname{sgn}(u)$$

Khâu relay 3 vị trí

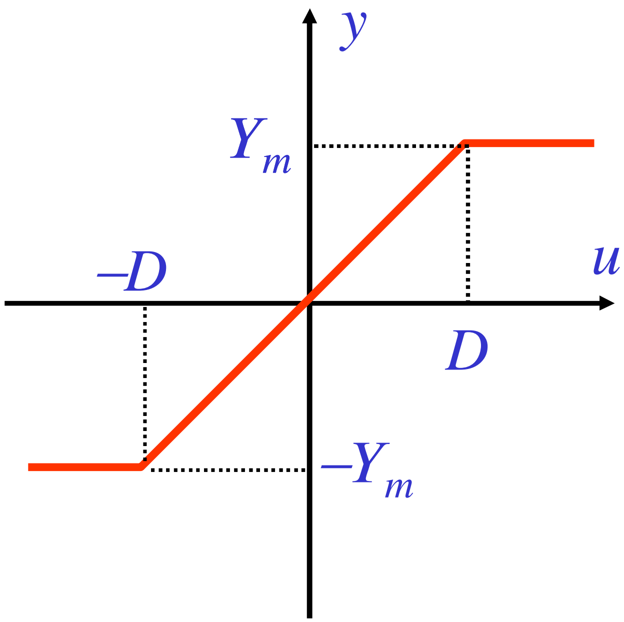


$$y = \begin{cases} Y_m \operatorname{sgn}(u) & (\text{nếu} \, |u| \geq D) \\ 0 & (\text{nếu} \, |u| < D) \end{cases}$$

Khái niệm

Các khâu phi tuyến cơ bản (tt)

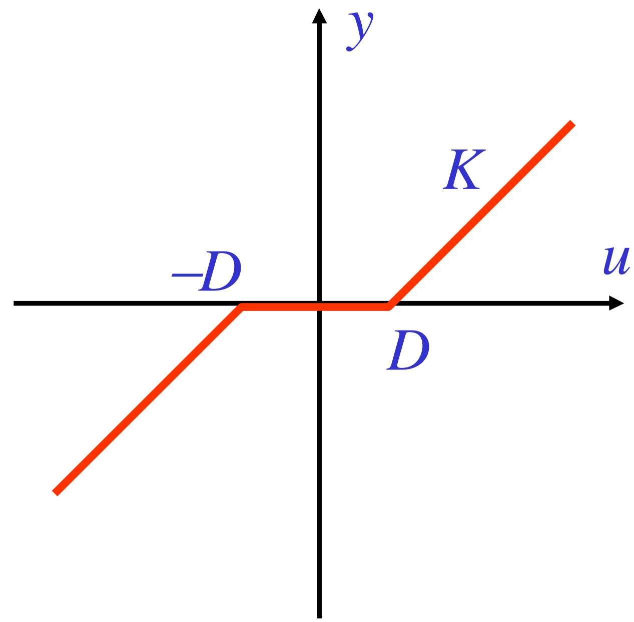
Khâu khuếch đại bão hòa



$$y=\begin{cases} Y_m\,\mathrm{sgn}(u) & (\text{nếu } |u|>D) \\ Ku & (\text{nếu } |u|\le D) \end{cases}$$

$$(K = Y_m / D)$$

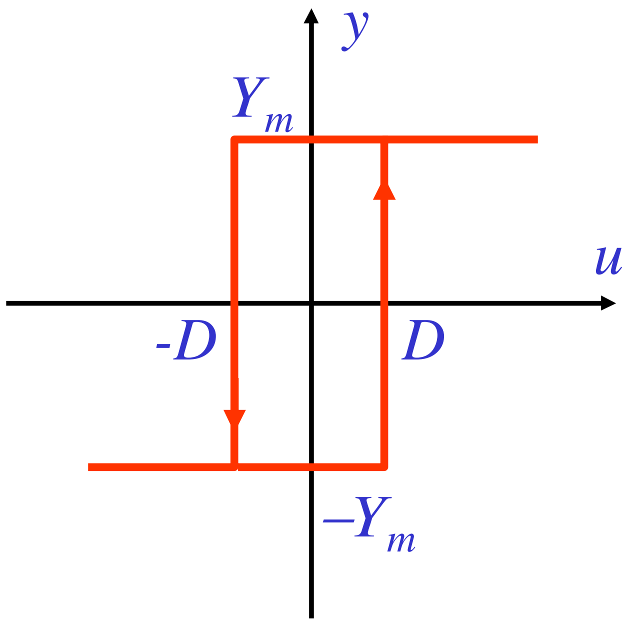
Khâu khuếch đại có miền chết



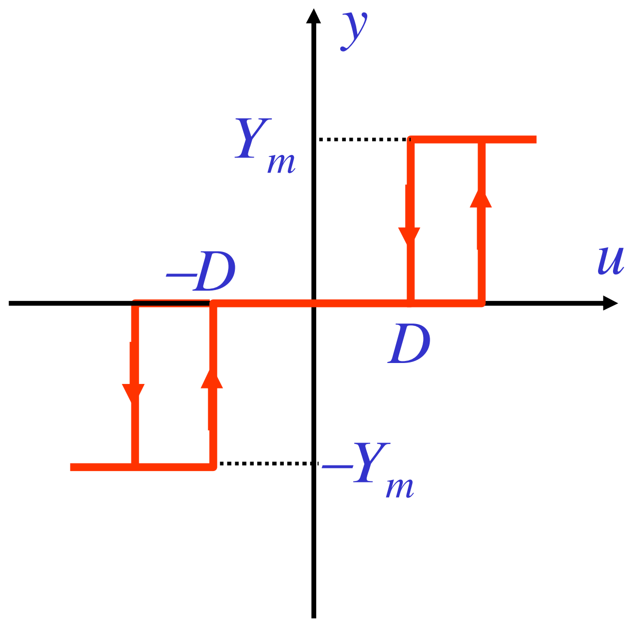
$$y=\begin{cases} K(u - D\,\mathrm{sgn}(u)) & (\text{nếu } |u|\ge D) \\ 0 & (\text{nếu } |u|< D) \end{cases}$$

Các khâu phi tuyến cơ bản (tt)

Khâu relay 2 vị trí có trễ



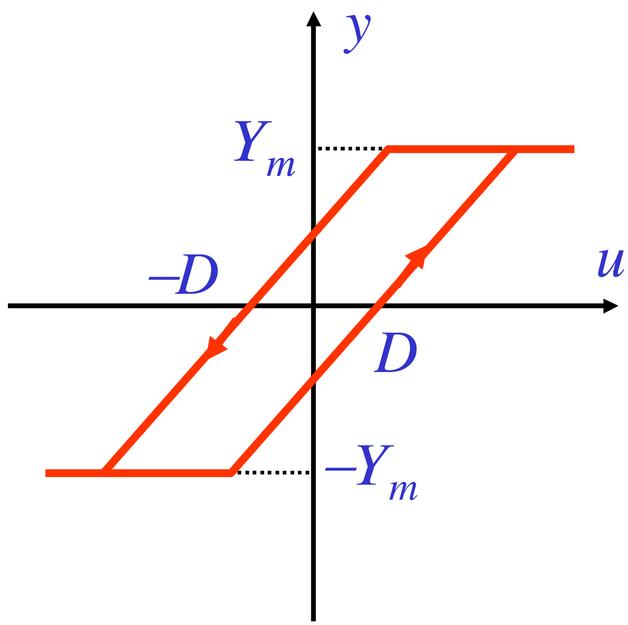
Khâu relay 3 vị trí có trễ



$$y = \begin{cases} Y_m \operatorname{sgn}(u) & (\text{nếu } |u| \geq D) \\ -Y_m \operatorname{sgn}(\dot{u}) & (\text{nếu } |u| < D) \end{cases}$$

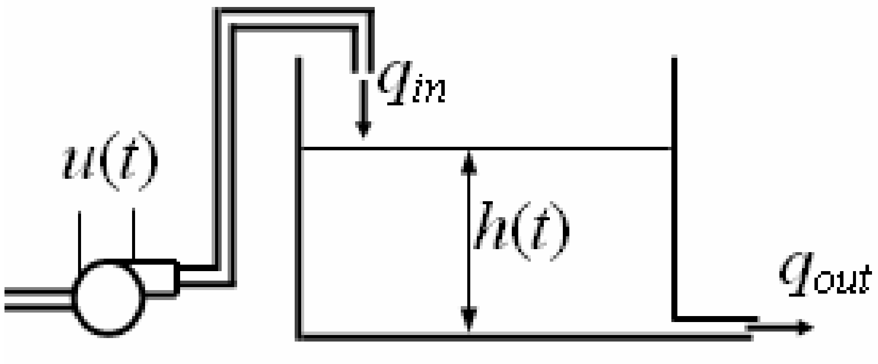
Các khâu phi tuyến cơ bản (tt)

Khâu khuếch đại
bão hòa có trễ



Một số ví dụ đối tượng phi tuyến

✶ Hệ bồn chứa chất lỏng



$$\dot{h}(t) = \frac{1}{A}\left(ku(t) - a\sqrt{2gh(t)}\right)$$

h(t): độ cao mực chất lỏng trong bồn chứa

u(t): điện áp điều khiển máy bơm

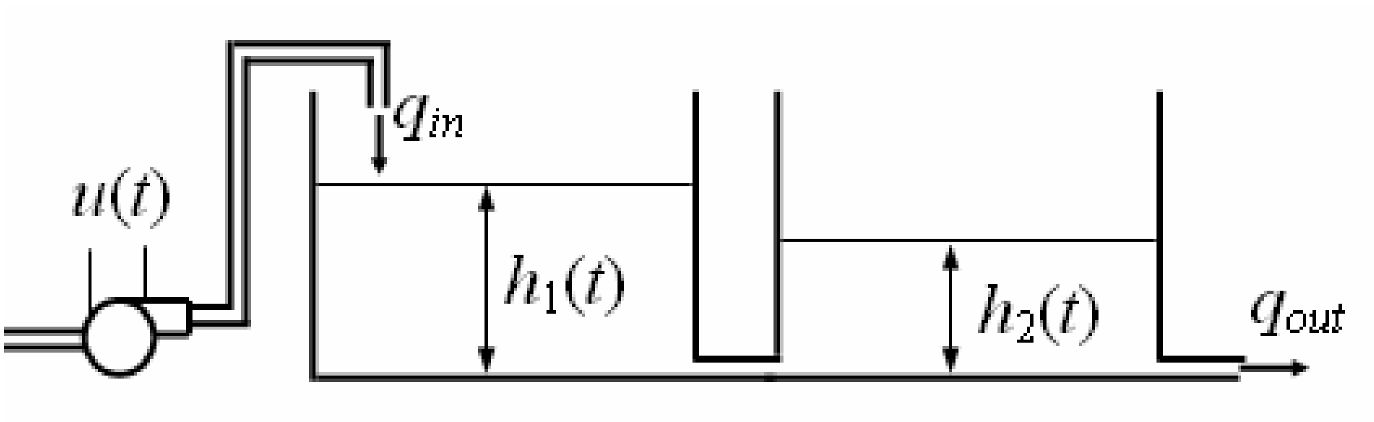
A: tiết diện ngang bồn chứa

a: tiết diện van xả

k: hệ số tỉ lệ với công suất máy bơm

Một số ví dụ đối tượng phi tuyến (tt)

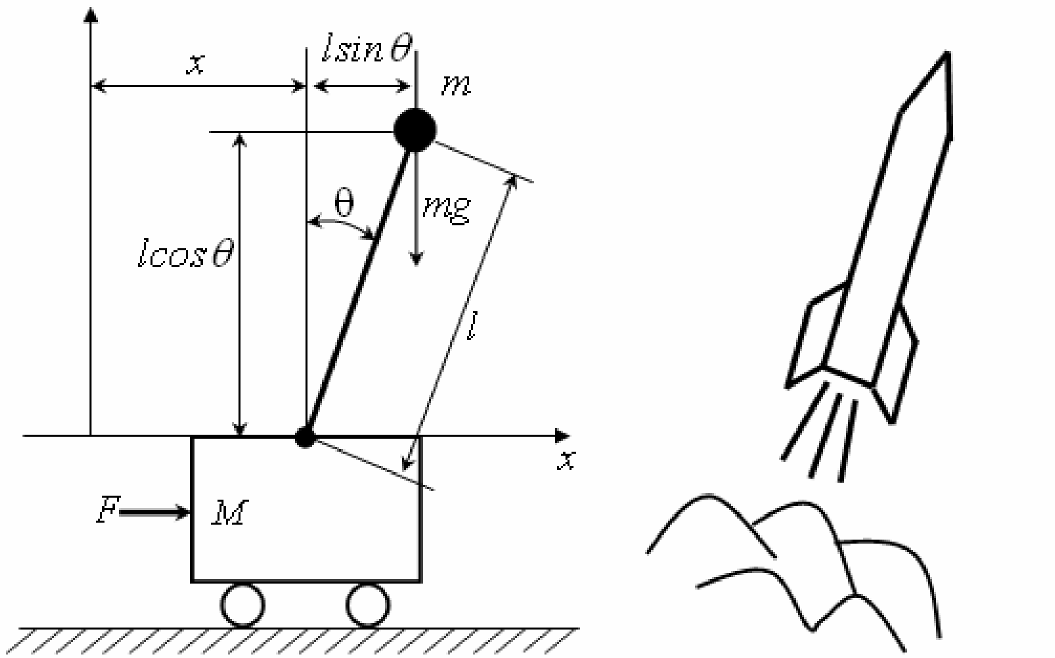
- Hệ bồn chứa chất lỏng nối tiếp



$$\begin{cases} \dot{h}_1(t) = \dfrac{1}{A}\left(ku(t) - a_{12}\sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))}\right) \\ \dot{h}_2(t) = \dfrac{1}{A}\left(a_{12}\sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} - a_2\sqrt{2gh_2(t)}\right) \end{cases}$$

Một số ví dụ đối tượng phi tuyến (tt)

- Hệ con lắc ngược



Chú thích:

M : trọng lượng xe [Kg]   *m : trọng lượng con lắc* [Kg]

l : chiều dài con lắc [m]   *u : lực tác động vào xe* [N]

g : gia tốc trọng trường [m/s^2]   *x : vị trí xe* [m]

θ: góc giữa con lắc và phương thẳng đứng [rad]

Một số ví dụ đối tượng phi tuyến (tt)

- Hệ con lắc ngược (tt)

$$\ddot{x} = \frac{F + ml(\sin\theta)\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta\sin\theta}{M + m - m(\cos\theta)^2}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{F\cos\theta - (M+m)g(\sin\theta) + ml(\cos\theta\sin\theta)\dot{\theta}}{ml(\cos\theta)^2 - (M+m)l}$$

Các phương pháp khảo sát hệ phi tuyến

- Không có phương pháp nào có thể áp dụng hiệu quả cho mọi hệ phi tuyến.
- Môn học đề cập đến một số phương pháp thường dùng sau đây:
  - Phương pháp tuyến tính hóa
  - Phương pháp hàm mô tả
  - Phương pháp Lyapunov

Phương pháp tuyến tính hóa

Phương pháp

★ Xét hệ phi tuyến mô tả bởi phương trình trạng thái.

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \\ y(t) = h(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \end{cases}$$

★ Khai triển Taylor xung quanh điểm làm việc tĩnh $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{u})$ ta có thể mô tả hệ thống bằng phương trình trạng thái tuyến tính:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{D}\tilde{u}(t) \end{cases} \qquad (*)$$

trong đó:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \bar{\boldsymbol{x}}$$

$$\tilde{u}(t) = u(t) - \bar{u}$$

$$\tilde{y}(t) = y(t) - \bar{y} \qquad (\bar{y} = h(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{u}))$$

Phương pháp (tt)

- Các ma trận trạng thái của hệ t.tính gần đúng được tính như sau:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{u})}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u}\\ \frac{\partial f_2}{\partial u}\\ \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial u}\end{bmatrix}_{(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{u})}$$

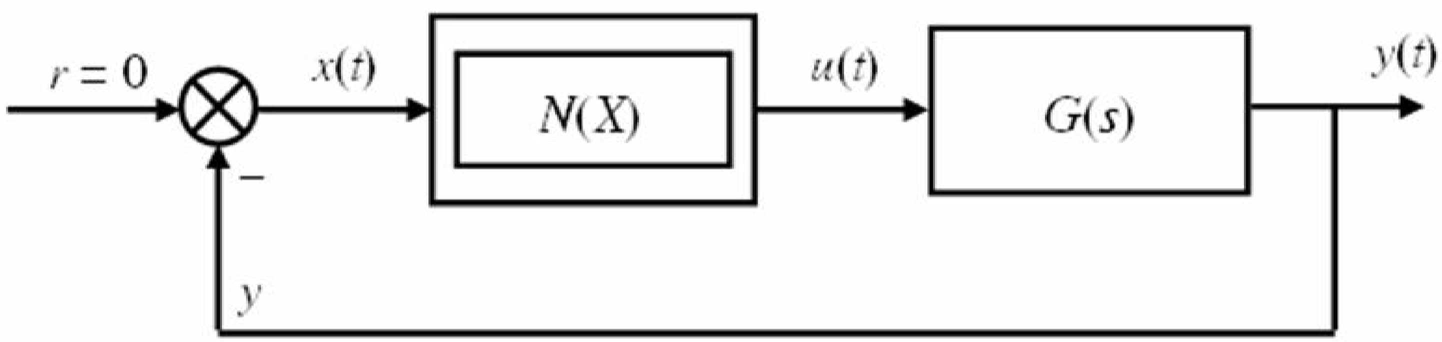
$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{u})}\qquad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\frac{\partial h}{\partial u}\end{bmatrix}_{(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{u})}$$

- Có thể áp dụng các phương pháp khảo sát hệ tuyến tính để phân tích, thiết kế hệ thống phi tuyến xung quanh điểm tĩnh dùng mô hình tuyến tính (*).

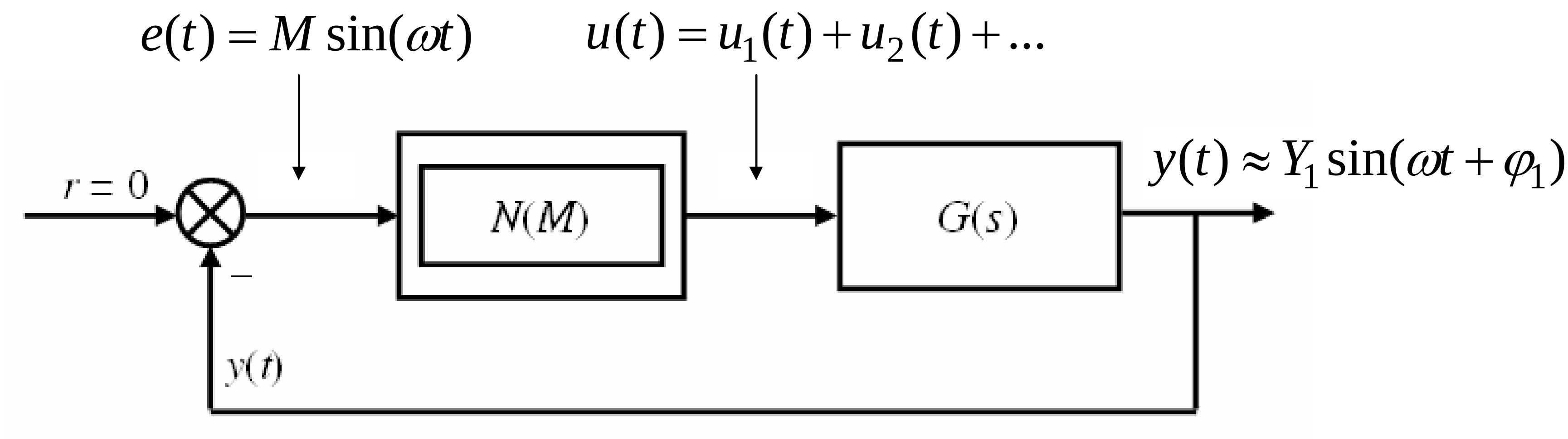
Phương pháp hàm mô tả
(Phương pháp tuyến tính hóa điều hòa)

Khái niệm

- ✶ Phương pháp hàm mô tả mở rộng gần đúng hàm truyền đạt của hệ tuyến tính sang hệ phi tuyến.
- ✶ Phương pháp hàm mô tả là phương pháp khảo sát trong miền tần số có thể áp dụng cho các hệ phi tuyến bậc cao (n>2) do dễ thực hiện và tương đối giống tiêu chuẩn Nyquist.
- ✶ Chỉ áp dụng được để khảo sát chế độ dao động trong hệ phi tuyến gồm có khâu phi tuyến nối tiếp với khâu tuyến tính theo sơ đồ khối như sau:



Phương trình cân bằng điều hòa



★ Để khảo khả năng tồn tại dao động tuần hoàn không tắt trong hệ, ở đầu vào khâu phi tuyến ta cho tác động sóng điều hòa:

$$e(t) = M\sin(\omega t)$$

Phương trình cân bằng điều hòa (tt)

- Tín hiệu ra khâu phi tuyến không phải là tín hiệu hình sin. Phân tích Fourier ta thấy $u(t)$ chứa thành phần tần số cơ bản ω và các thành phần hài bậc cao 2ω, 3ω...

$$u(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[A_k\sin(k\omega t)+B_k\cos(k\omega t)]$$

Các hệ số Fourier xác định theo các công thức sau:

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)d(\omega t)$$

$$A_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\sin(k\omega t)d(\omega t)$$

$$B_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cos(n\omega t)d(\omega t)$$

Phương trình cân bằng điều hòa (tt)

- Giả thiết $G(s)$ là bộ lọc thông thấp, các thành phần hài bậc cao ở ngõ ra của khâu tuyến tính không đáng kể so với thành phần tần số cơ bản, khi đó tín hiệu ra của khâu tuyến tính gần đúng bằng:

$$y(t) \approx Y_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

- Điều kiện để trong hệ có dao động ổn định với tần số ω là:

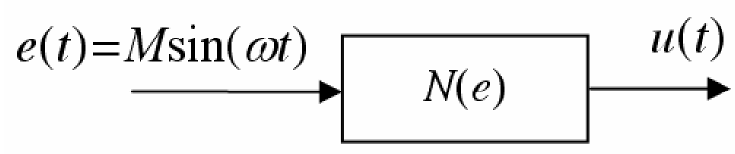
$$M \sin(\omega t) = e(t) = -y(t) \approx -Y_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

- Suy ra:

$$\begin{cases} Y_1 = M & \text{Phương trình cân bằng biên độ} \\ \varphi_1 = \pi & \text{Phương trình cân bằng pha} \end{cases}$$

Hàm mô tả

- ✶ Xét khâu phi tuyến :



- ✶ Do khi tín hiệu vào của khâu phi tuyến là tín hiệu hình sin:

$$e(t) = M\sin(\omega t)$$

tín hiệu ra $u(t)$ xấp xỉ thành phần tần số cơ bản (do ta bỏ qua các thành phần hài bậc cao) $u(t) \approx u_1(t) = A_1\sin(\omega t) + B_1\cos(\omega t)$

nên ta có thể coi khâu phi tuyến như là một khâu khuếch đại có hệ số khuếch đại là:

$$N(M) = \frac{A_1 + jB_1}{M}$$

- ✶ Tổng quát $N(M)$ là một hàm phức nên ta gọi là hệ số khuếch đại phức của khâu phi tuyến. Vì quan hệ vào ra của khâu phi tuyến có thể mô tả gần đúng bằng hệ số khuếch đại phức $N(M)$ nên $N(M)$ còn được gọi là hàm mô tả của khâu phi tuyến.

Hàm mô tả

- Định nghĩa: Hàm mô tả (hay còn gọi là hệ số khuếch đại phức) là tỉ số giữa thành phần sóng hài cơ bản của tín hiệu ra của khâu phi tuyến và tín hiệu vào hình sin.

$$N(M)=\frac{A_1+jB_1}{M}$$

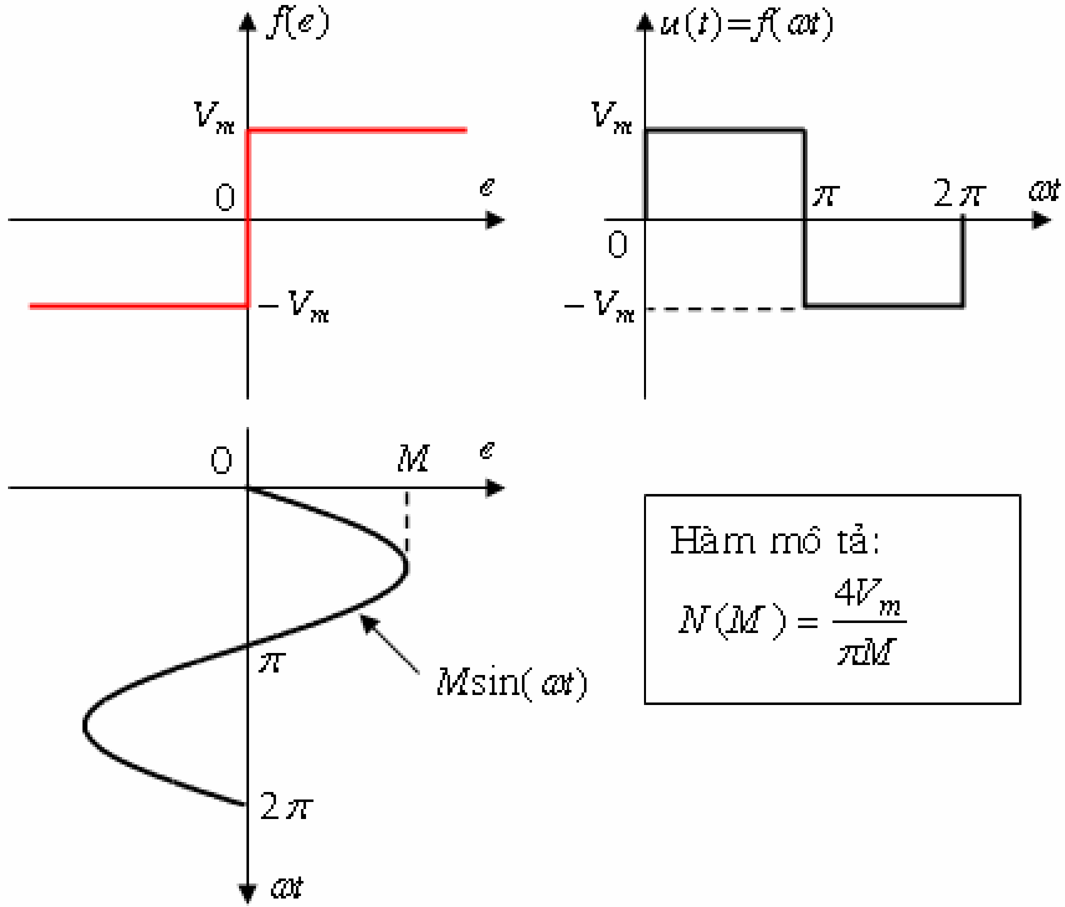
$$A_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\sin(\omega t)d(\omega t) \qquad B_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cos(\omega t)d(\omega t)$$

- Trong các công thức trên $u(t)$ là tín hiệu ra của khâu phi tuyến khi tín hiệu vào là $M\sin(\omega t)$. Nếu $u(t)$ là hàm lẻ thì:

$$A_1=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}u(t)\sin(\omega t)d(\omega t) \qquad B_1=0$$

Hàm mô tả của các khâu phi tuyến cơ bản

★ Khâu relay 2 vị trí:



Hàm mô tả:

$$N(M) = \frac{4V_m}{\pi M}$$

Hàm mô tả của các khâu phi tuyến cơ bản

✶ Khâu relay 2 vị trí (tt)

Do u(t) là hàm lẻ nên:

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} V_m \sin(\omega t)d(\omega t) = \frac{2V_m}{\pi}\cos(\omega t)\Big|_{\omega t=0}^{\pi} = \frac{4V_m}{\pi}$$

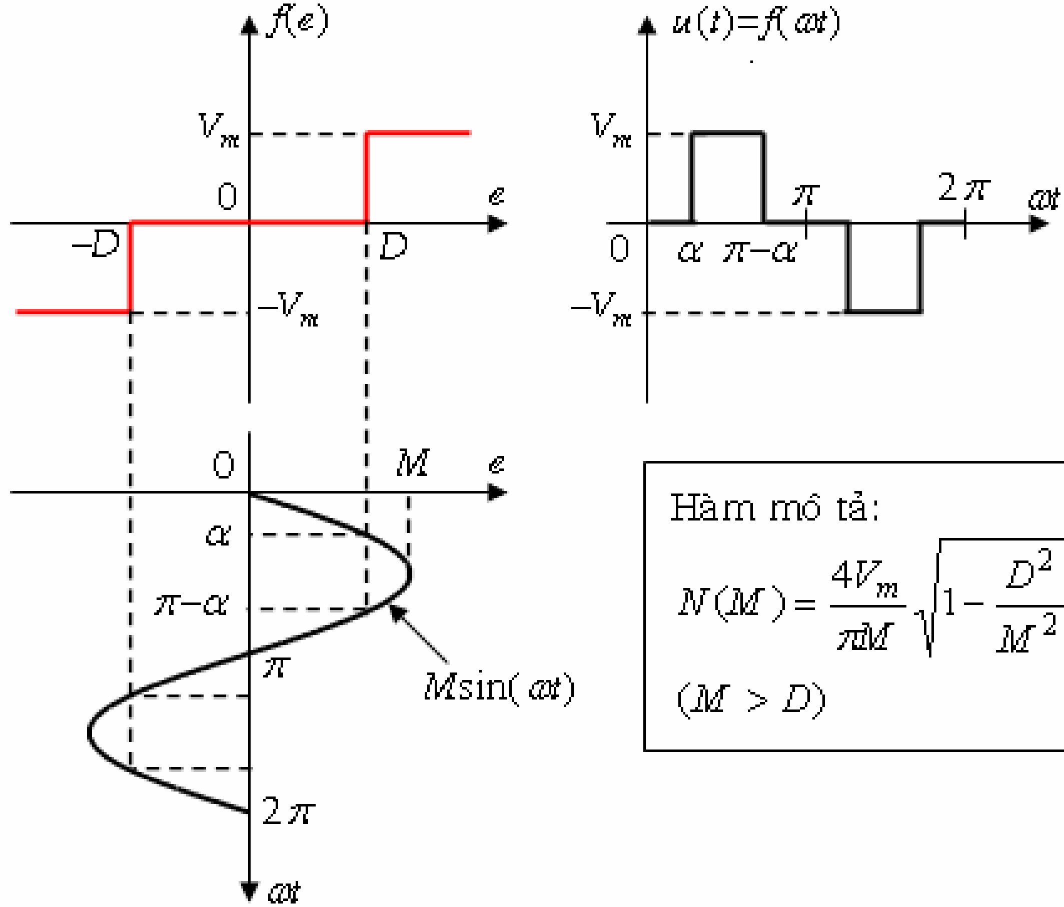
$$B_1 = 0$$

Do đó hàm mô tả của khâu relay 2 vị trí là:

$$N(M) = \frac{A_1 + jB_1}{M} = \frac{4V_m}{\pi M}$$

Hàm mô tả của các khâu phi tuyến cơ bản

- Khâu relay 3 vị trí:



Hàm mô tả:

$$N(M) = \frac{4V_m}{\pi M}\sqrt{1-\frac{D^2}{M^2}}$$

$(M > D)$

Hàm mô tả của các khâu phi tuyến cơ bản

★ Khâu relay 3 vị trí (tt)

Do u(t) là hàm lẻ nên $B_1 = 0$

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t) = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} V_m \sin(\omega t)d(\omega t) = \frac{2V_m}{\pi}\cos(\omega t)\Big|_{\omega t=\alpha}^{\pi-\alpha} = \frac{4V_m}{\pi}\cos\alpha$$

Theo đồ thị ta có: $D = M\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{D}{M} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\dfrac{D^2}{M^2}}$

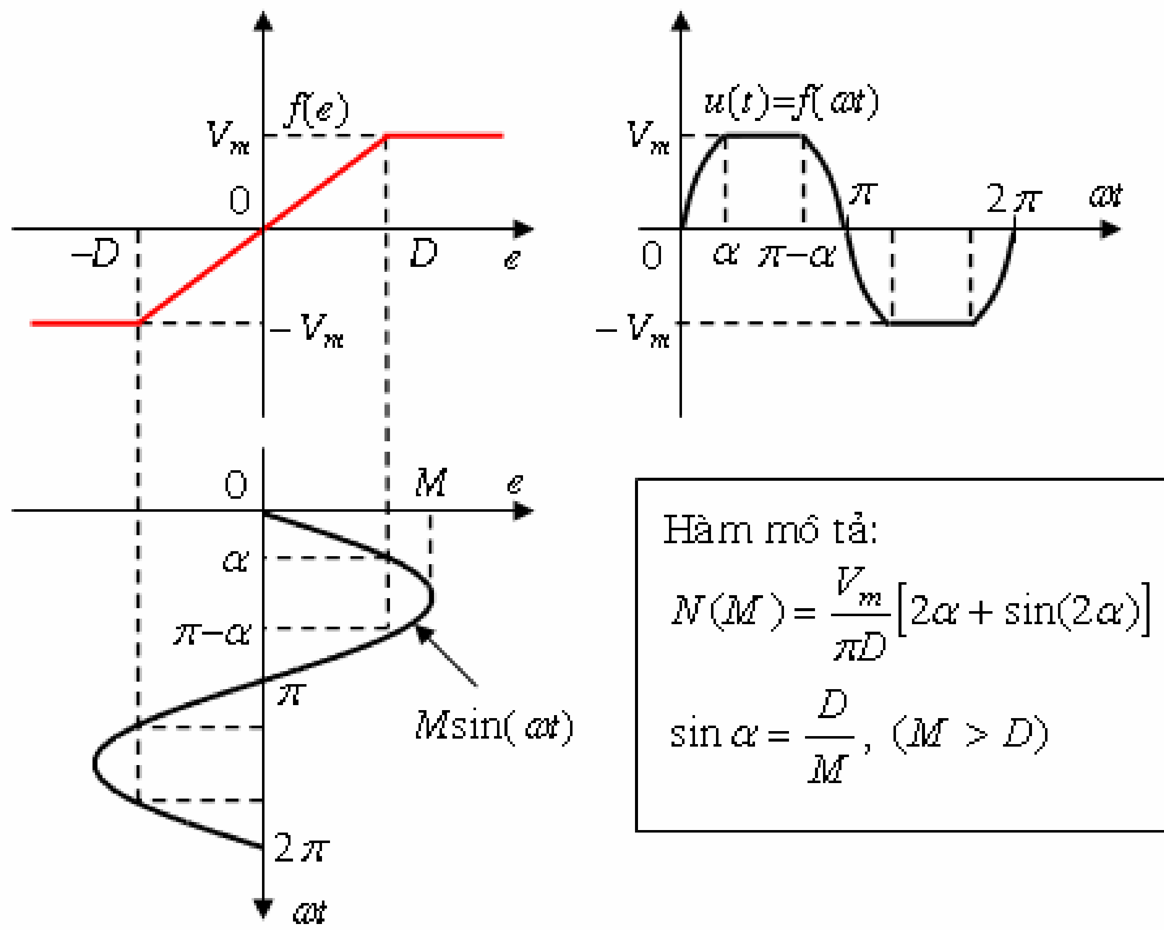
$\Rightarrow$ $$A_1 = \frac{4V_m}{\pi}\sqrt{1-\frac{D^2}{M^2}}$$

Do đó hàm mô tả của khâu relay 3 vị trí là:

$$N(M) = \frac{A_1 + jB_1}{M} = \frac{4V_m}{\pi M}\sqrt{1-\frac{D^2}{M^2}}$$

Hàm mô tả của các khâu phi tuyến cơ bản

✶ Khâu khuếch đại bão hòa:



Hàm mô tả:

$$N(M) = \frac{V_m}{\pi D}\left[2\alpha + \sin(2\alpha)\right]$$

$$\sin\alpha = \frac{D}{M}, \ (M > D)$$

Hàm mô tả của các khâu phi tuyến cơ bản

★ Khâu khuếch đại bão hòa (tt)

Do u(t) là hàm lẻ nên $B_1 = 0$

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\int_0^{\alpha}\frac{V_m M}{D}\sin^2(\omega t)d(\omega t) + \int_{\alpha}^{\pi/2} V_m\sin(\omega t)d(\omega t)\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{V_m M}{2D}\left(\omega t - \frac{\sin(2\omega t)}{2}\right)\Bigg|_{\omega t=0}^{\alpha} - V_m\cos(\omega t)d(\omega t)\Bigg|_{\omega t=\alpha}^{\pi/2}\right]$$

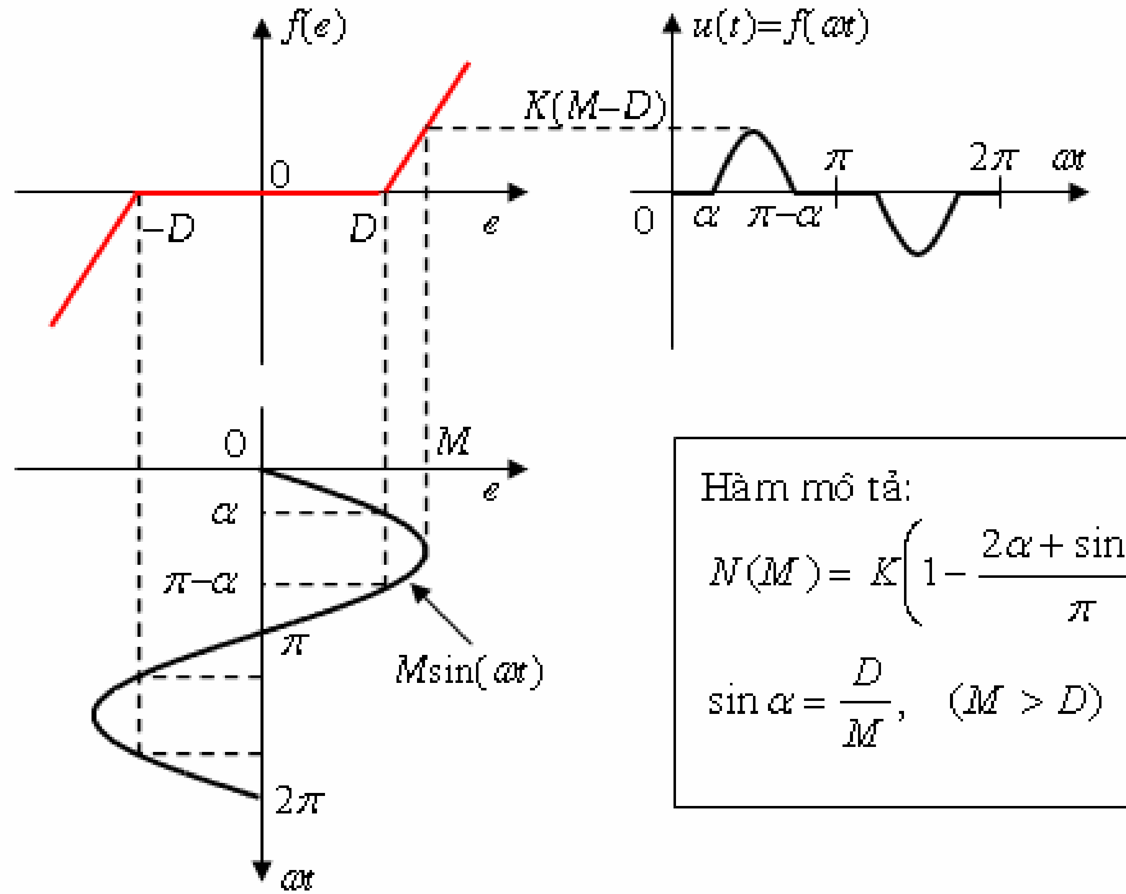
$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{V_m M}{2D}\left(\alpha - \frac{\sin(2\alpha)}{2}\right) + V_m\cos\alpha\right] = \frac{M}{\pi}\left[\frac{V_m}{D}\left(2\alpha + \sin(2\alpha)\right)\right]$$

Do đó hàm mô tả của khâu khuếch đại bão hòa là:

$$N(M) = \frac{A_1 + jB_1}{M} = \frac{V_m}{\pi D}\left[2\alpha + \sin(2\alpha)\right] \qquad \left(\sin\alpha = \frac{D}{M}\right)$$

Hàm mô tả của các khâu phi tuyến cơ bản

- Khâu khuếch đại có vùng chết:



Hàm mô tả:

$$N(M) = K\left(1 - \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\pi}\right)$$

$$\sin\alpha = \frac{D}{M}, \quad (M > D)$$

Hàm mô tả của các khâu phi tuyến cơ bản

- Khâu khuếch đại có vùng chết (tt)

Do u(t) là hàm lẻ nên $B_1 = 0$

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t) = \frac{4}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi/2} K[M\sin(\omega t) - D]\sin(\omega t)d(\omega t)$$

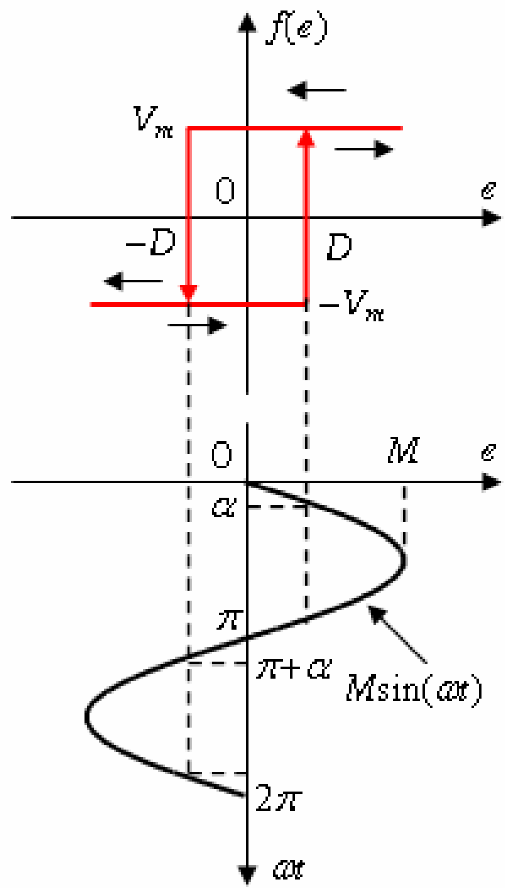
$$= \frac{4KM}{\pi}\left[\left(\omega t - \frac{\sin(2\omega t)}{2}\right) + \frac{D}{M}\cos(\omega t)\right]_{\alpha}^{\pi/2} = KM\left(1 - \frac{2\alpha + \sin(2\alpha)}{\pi}\right)$$

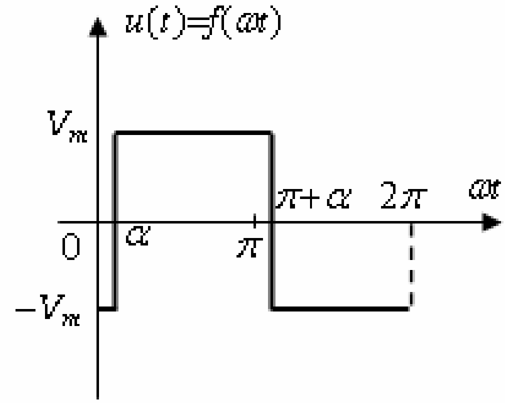
Do đó hàm mô tả của khâu khuếch đại có vùng chết là:

$$N(M) = \frac{A_1 + jB_1}{M} = K\left(1 - \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\pi}\right) \qquad \left(\sin\alpha = \frac{D}{M}\right)$$

Hàm mô tả của các khâu phi tuyến cơ bản

- Khâu relay 2 vị trí có trễ:





Hàm mô tả:

$$N(M) = \frac{4V_m}{\pi M}(\cos\alpha - j\sin\alpha)$$

$$\sin\alpha = \frac{D}{M} \qquad (M > D)$$

Hàm mô tả của các khâu phi tuyến cơ bản

✶ Khâu relay 2 vị trí có trễ (tt)

Ta có:

$$A_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t) = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi+\alpha} V_m \sin(\omega t)d(\omega t) = \frac{4V_m}{\pi}\cos\alpha$$

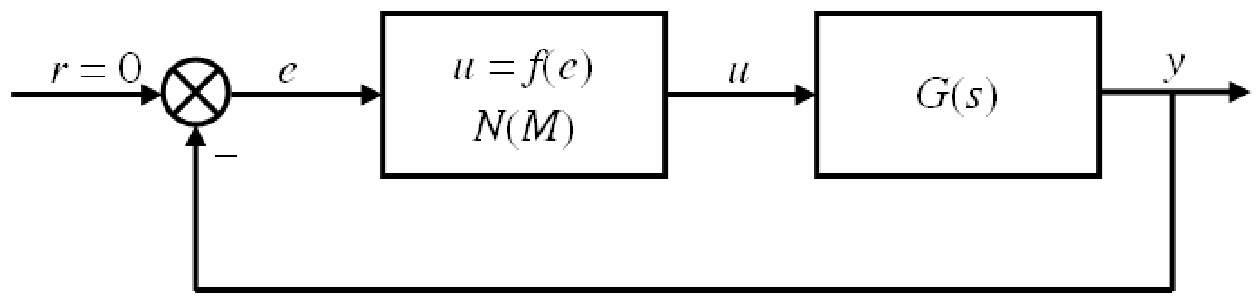
$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} u(t)\cos(\omega t)d(\omega t) = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi+\alpha} V_m \cos(\omega t)d(\omega t) = -\frac{4V_m}{\pi}\sin\alpha$$

Do đó hàm mô tả của khâu relay 2 vị trí có trễ là:

$$\boxed{N(M) = \frac{A_1 + jB_1}{M} = \frac{4V_m}{\pi M}(\cos\alpha - j\sin\alpha)} \qquad \left(\sin\alpha = \frac{D}{M}\right)$$

Khảo sát chế độ dao động đều hòa trong hệ phi tuyến

- Xét hệ phi tuyến có sơ đồ như sau:



- Phương trình đặc trưng của hệ thống là:

$$1 + N(M)G(j\omega) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G(j\omega) = -\frac{1}{N(M)} \qquad (*)$$

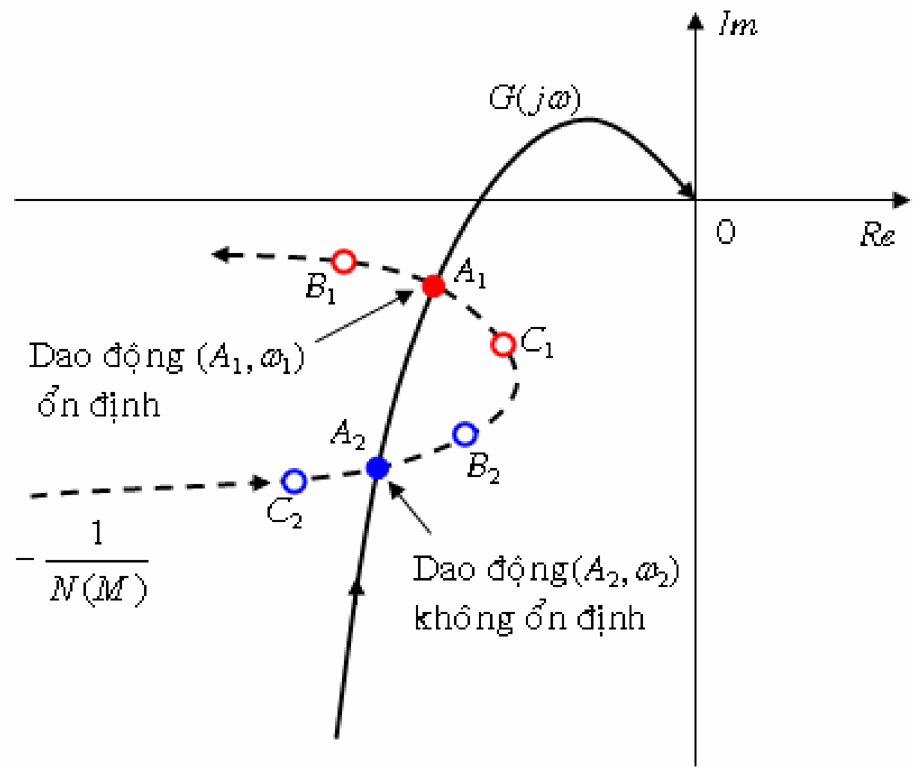
- Phương trình trên được gọi là phương trình cân bằng điều hòa. Phương trình này sẽ được dùng để xác định biên độ và tần số của dao động điều hòa trong hệ phi tuyến.

- Nếu (M^*, ω^*) là nghiệm của phương trình (*) thì trong hệ phi tuyến có dao động với tần số ω^* , biên độ M^*.

Khảo sát chế độ dao động đều hòa trong hệ phi tuyến (tt)

- Về mặt hình học, nghiệm (M^*, ω^*) là nghiệm của phương trình (*) chính là giao điểm của đường cong Nyquist $G(j\omega)$ của khâu tuyến tính và đường đặc tính $-1/N(M)$ của khâu phi tuyến.

- Dao động trong hệ phi tuyến là ổn định nếu đi theo chiều tăng của đặc tính $-1/N(M)$ của khâu phi tuyến, chuyển từ vùng không ổn định sang vùng ổn định của khâu tuyến tính $G(j\omega)$.



Trình tự khảo sát chế độ dao động trong hệ phi tuyến

B1: Xác định hàm mô tả của khâu phi tuyến (nếu khâu phi tuyến không phải là các khâu cơ bản).

B2: Điều kiện tồn tại dao động trong hệ: đường cong Nyquist $G(j\omega)$ và đường đặc tính $-1/N(M)$ phải cắt nhau.

B3: Biên độ, tần số dao động (nếu có) là nghiệm của phương trình:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(M)} \qquad (*)$$

Nếu $N(M)$ là hàm thực thì:

- Tần số dao động chính là tần số cắt pha $\omega_{-\pi}$ của khâu tuyến tính $G(j\omega)$.

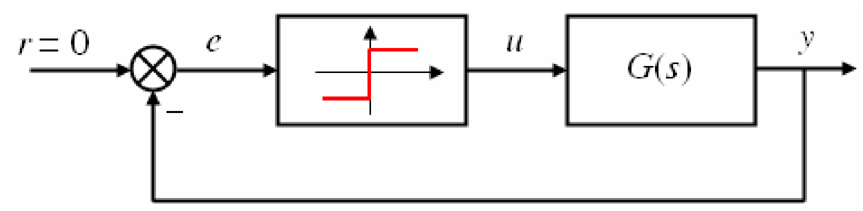
$$\angle G(j\omega_{-\pi}) = -\pi$$

- Biên độ dao động là nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{N(M)} = \left|G(j\omega_{-\pi})\right|$$

Thí dụ 1

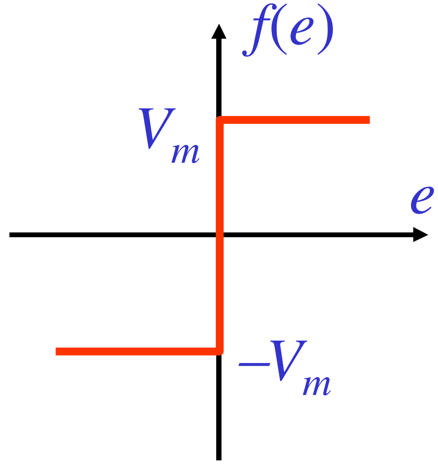
★ Xét hệ phi tuyến có sơ đồ như sau:



Hàm truyền của khâu tuyến tính là

$$G(s) = \frac{10}{s(0.2s+1)(2s+1)}$$

Khâu phi tuyến là khâu relay 2 vị trí có V_m=6.

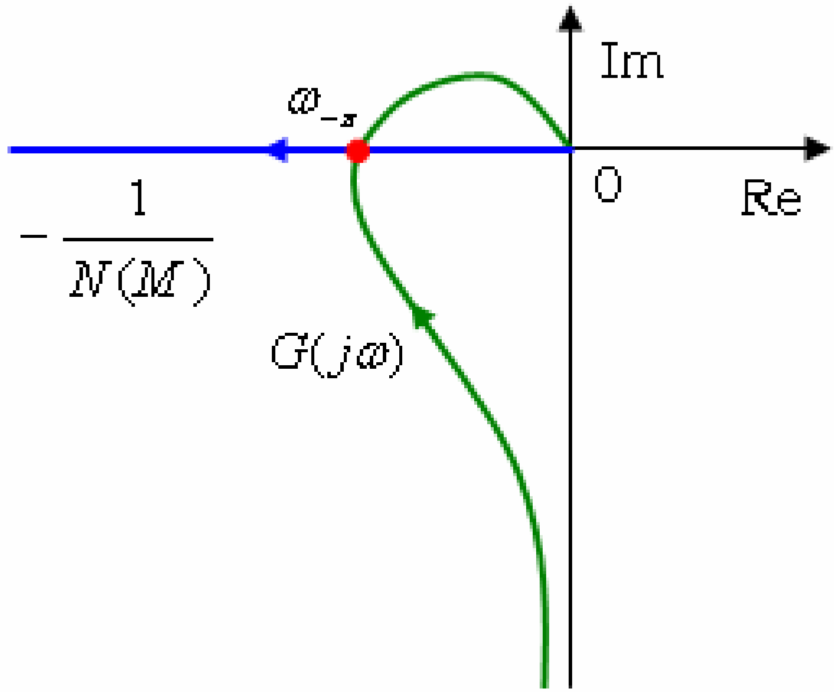


Hãy xác định biên độ và tần số dao động tự kích trong hệ (nếu có).

Thí dụ 1: Lời giải

- Hàm mô tả của khâu relay 2 vị trí là: $N(M)=\dfrac{4V_m}{\pi M}$

- Do đường cong Nyquist $G(j\omega)$ và đường đặc tính $-1/N(M)$ luôn luôn cắt nhau (xem hình vẽ) nên trong hệ phi tuyến luôn luôn có dao động.



Thí dụ 1: Lời giải (tt)

- Tần số dao động là tần số cắt pha của $G(j\omega)$:

$$\angle G(j\omega_{-\pi}) = \arg\left[\frac{10}{j\omega_{-\pi}(0.2j\omega_{-\pi}+1)(2j\omega_{-\pi}+1)}\right] = -\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - \arctan(0.2\omega) - \arctan(2\omega) = -\pi \quad \Leftrightarrow \arctan(0.2\omega) + \arctan(2\omega) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(0.2\omega_{-\pi}) + (2\omega_{-\pi})}{1-(0.2\omega_{-\pi}).(2\omega_{-\pi})} = \infty \quad \Leftrightarrow 1-(0.2\omega_{-\pi}).(2\omega_{-\pi}) = 0 \quad \Leftrightarrow \omega_{-\pi} = 1.58 \ \ (\text{rad/sec})$$

- Biên độ dao động là nghiệm của phương trình:

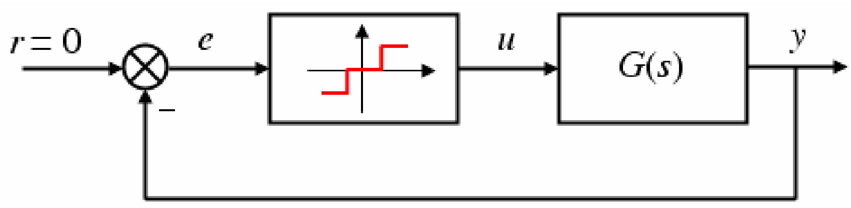
$$\frac{1}{N(M)} = \left|G(j\omega_{-\pi})\right| = \frac{10}{1.58\sqrt{1+(0.2\times 1.58)^2}\sqrt{1+(2\times 1.58)^2}} = 1.82$$

$$\Rightarrow \frac{\pi M}{4V_m} = 1.82 \qquad \Rightarrow M = 13.90$$

- Kết luận: Trong hệ phi tuyến có dao động $y(t) = 13.90\sin(1.58t)$

Thí dụ 2

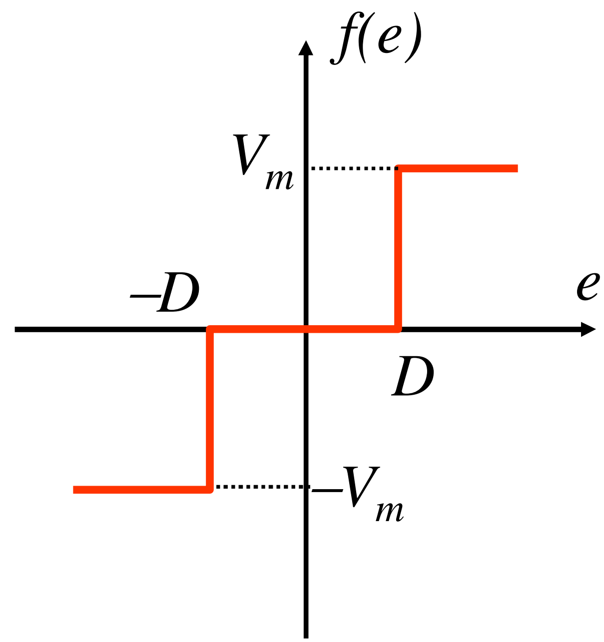
★ Xét hệ phi tuyến có sơ đồ như sau:



Hàm truyền của khâu tuyến tính là

$$G(s)=\frac{10}{s(0.2s+1)(2s+1)}$$

Khâu phi tuyến là khâu relay 3 vị trí.



1. Hãy tìm điều kiện để trong hệ phi tuyến có dao động.

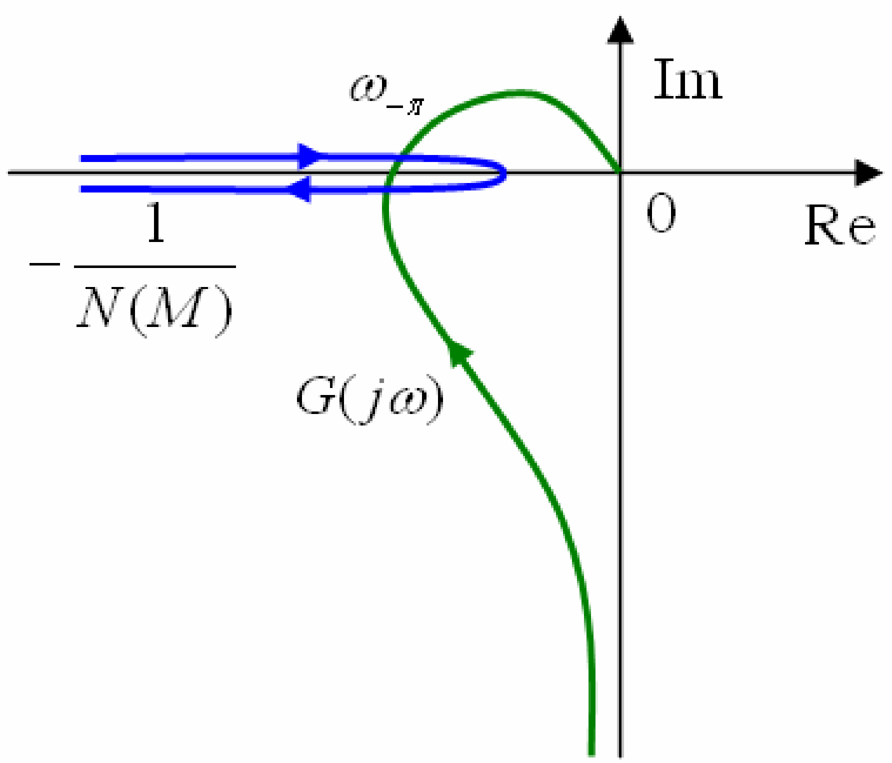
2. Hãy xác định biên độ và tần số dao động khi V_m=6, D=0.1.

Thí dụ 2: Lời giải

- Hàm mô tả của khâu relay 3 vị trí là: $N(M)=\dfrac{4V_m}{\pi M}\sqrt{1-\dfrac{D^2}{M^2}}$

- Điều kiện để trong hệ thống có dao động là đường cong Nyquist $G(j\omega)$ và đường đặc tính $-1/N(M)$ phải cắt nhau. Điều này xảy ra khi:

$$\left|-\frac{1}{N(M)}\right|\le\left|G(j\omega_{-\pi})\right|$$



Thí dụ 2: Lời giải (tt)

- Tần số cắt pha của $G(j\omega)$ (xem cách tính ở thí dụ 1)

$$\omega_{-\pi} = 1.58 \ \text{(rad/sec)}$$

- Để dao động xảy ra ta phải có điều kiện:

$$\left| -\frac{1}{N(M)} \right| \le \left| G(j\omega_{-\pi}) \right| = \frac{10}{1.58\sqrt{1+(0.2\times1.58)^2}\,\sqrt{1+(2\times1.58)^2}} = 1.82$$

$$\Rightarrow N(M) \ge 0.55 \qquad (*)$$

- Theo bất đẳng thức Cauchy

$$N(M) = \frac{4V_m}{\pi M}\sqrt{1-\frac{D^2}{M^2}} \le \frac{2V_m}{\pi D}\left[\left(\frac{D}{M}\right)^2 + \left(\sqrt{1-\frac{D^2}{M^2}}\right)^2\right] = \frac{2V_m}{\pi D}$$

Thí dụ 2: Lời giải (tt)

- Do đó điều kiện (*) được thỏa mãn khi:

$$\frac{2V_m}{\pi D} \geq 0.55 \quad \Leftrightarrow \frac{V_m}{D} \geq 0.864$$

- Vậy điều kiện để trong hệ có dao động tự kích là: $\boxed{\frac{V_m}{D} \geq 0.864}$
- Biên độ dao động là nghiệm của phương trình:

$$\left| -\frac{1}{N(M)} \right| = 1.82 \quad \Leftrightarrow N(M) = 0.55 \quad \Leftrightarrow \frac{4V_m}{\pi M}\sqrt{1 - \frac{D^2}{M^2}} = 0.55$$

- Khi V_m=6, D=0.1, giải phương trình trên ta được: $\boxed{M = 13.90}$

- Vậy dao động trong hệ là: $\boxed{y(t) = 13.90 \sin(1.58t)}$

Phương pháp Lyapunov

Giới thiệu

- Phương pháp Lyapunov cung cấp điều kiện đủ để đánh giá tính ổn định của hệ phi tuyến.
- Có thể áp dụng cho hệ phi tuyến bậc cao bất kỳ.
- Có thể dùng phương pháp Lyapunov để thiết kế các bộ điều khiển phi tuyến.
- Hiện nay phương pháp Lyapunov là phương pháp được sử dụng rộng rãi nhất để phân tích và thiết kế hệ phi tuyến.

Một số định nghĩa

- Xét hệ phi tuyến mô tả bởi phương trình trạng thái sau:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u)$$

- Định nghĩa: Một điểm trạng thái $\boldsymbol{x}^*$ được gọi là điểm cân bằng nếu như khi đang ở điểm trạng thái $\boldsymbol{x}^*$ và không có tác động nào từ bên ngoài thì hệ sẽ nằm nguyên tại đó.

Dễ thấy điểm cân bằng phải là nghiệm của phương trình:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u)\big|_{u=0} = \boldsymbol{0}$$

Hệ phi tuyến có thể có nhiều điểm cân bằng hoặc không có điểm cân bằng nào. Điều này hoàn toàn khác so với hệ tuyến tính , hệ tuyến tính luôn luôn có 1 điểm cân bằng là $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{0}$.

Một số định nghĩa (tt)

- Định nghĩa: Một hệ thống được gọi là ổn định (tiệm cận) tại điểm cân bằng $\boldsymbol{x}^*$ nếu như có một tác động tức thời đánh bật hệ ra khỏi $\boldsymbol{x}^*$ và đưa đến điểm được $\boldsymbol{x_0}$ thuộc lân cận nào đó của $\boldsymbol{x}^*$ thì sau đó hệ có khả năng tự quay được về điểm cân bằng $\boldsymbol{x}^*$ ban đầu.

Chú ý: tính ổn định của hệ phi tuyến chỉ có nghĩa khi đi cùng với điểm cân bằng. Có thể hệ ổn định tại điểm cân bằng này nhưng không ổn định tại điểm cân bằng khác.

Một số định nghĩa (tt)

- Định nghĩa: Cho hệ phi tuyến không kích thích mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u)\big|_{u=0} \qquad (1)$$

Giả sử hệ thống có điểm cân bằng $\boldsymbol{x}^* = \mathbf{0}$.

- Hệ thống được gọi là ổn định Lyapunov tại điểm cân bằng **0** nếu với $\varepsilon > 0$ bất kỳ bao giờ cũng tồn tại δ phụ thuộc ε sao cho nghiệm $\boldsymbol{x}(t)$ của phương trình (1) với điều kiện đầu $\boldsymbol{x}(0)$ thỏa mãn:

$$\|\boldsymbol{x}(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

- Hệ thống được gọi là ổn định tiệm cận Lyapunov tại điểm cân bằng **0** nếu với $\varepsilon > 0$ bất kỳ bao giờ cũng tồn tại δ phụ thuộc ε sao cho nghiệm $\boldsymbol{x}(t)$ của phương trình (1) với điều kiện đầu $\boldsymbol{x}(0)$ thỏa mãn:

$$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{x}(t) = 0$$

Phương pháp tuyến tính hóa Lyapunov

- Cho hệ phi tuyến phương trình trạng thái:

$$\dot{x} = f(x, u) \qquad (1)$$

Giả sử xung quanh điểm cân bằng x^*, hệ thống (1) có thể tuyến tính hóa về dạng:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \qquad (2)$$

- Định lý:
  - Nếu hệ thống tuyến tính hóa (2) ổn định thì hệ phi tuyến (1) ổn định tiệm cận tại điểm cân bằng x^*.
  - Nếu hệ thống tuyến tính hóa (2) không ổn định thì hệ phi tuyến (1) không ổn định tại điểm cân bằng x^*.
  - Nếu hệ thống tuyến tính hóa (2) ở biên giới ổn định thì không kết luận được gì về tính ổn định của hệ phi tuyến tại điểm cân bằng x^*.

Phương pháp trực tiếp Lyapunov

- Định lý: Cho hệ phi tuyến không kích thích mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},u)\Big|_{u=0} \qquad (1)$$

Giả sử hệ thống có điểm cân bằng $\boldsymbol{x}^* = \mathbf{0}$.

Nếu tồn tại hàm $V(\boldsymbol{x})$ sao cho:

i) $V(0) = 0$

ii) $V(\boldsymbol{x}) > 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \neq 0$

iii) $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \neq 0$

Thì hệ thống (1) ổn định Lyapunov tại điểm 0.

Chú ý: Hàm $V(\boldsymbol{x})$ thường được chọn là hàm toàn phương theo biến trạng thái.